

1. Übungsblatt zur Vorlesung
Stochastik I
im Sommersemester 2016

Die Lösungen sind **in Zweiergruppen** zu verfassen und an der **Bürotür von Simon Holbach (05-515)** abzugeben.

In den folgenden Aufgaben seien stets (Ω, \mathcal{A}) sowie (Ω', \mathcal{A}') messbare Räume, $T: \Omega' \rightarrow \Omega$ eine Abbildung, $B \subset \Omega$ und $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Wir verwenden die Notation $\mathcal{E}|_B := \{A \cap B \mid A \in \mathcal{E}\}$.

Aufgabe 1 (3+1 Punkte)

(a) Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengensysteme σ -Algebren sind:

- (i) $\{A \subset \Omega \mid T^{-1}(A) \in \mathcal{A}'\} \subset \mathcal{P}(\Omega)$,
- (ii) $T(\mathcal{A}') = \{T(A') \mid A' \in \mathcal{A}'\} \subset \mathcal{P}(T(\Omega'))$,
- (iii) $T^{-1}(\mathcal{A}) = \{T^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}\} \subset \mathcal{P}(\Omega')$.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}|_B \subset \mathcal{P}(B)$ ein Spezialfall von (iii) ist.

Aufgabe 2 (3+1 Punkte)

Beweisen Sie die Identitäten

- (a) $T^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) = \sigma(T^{-1}(\mathcal{E}))$,
- (b) $\sigma(\mathcal{E})|_B = \sigma(\mathcal{E}|_B)$.

Hinweis zu (a): Betrachten Sie für eine Inklusion das System $\mathcal{G} := \{A \subset \Omega \mid T^{-1}(A) \in \sigma(T^{-1}(\mathcal{E}))\}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für jedes $A \in \sigma(\mathcal{E})$ ein abzählbares Teilsystem $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$ existiert mit $A \in \sigma(\mathcal{C})$.

Hinweis: Betrachten Sie das System $\mathcal{H} := \{A \in \sigma(\mathcal{E}) \mid \exists \text{ abzählbares } \mathcal{C} \subset \mathcal{E} \text{ mit } A \in \sigma(\mathcal{C})\}$.

Aufgabe 4 (2+2 Punkte)

Sei $\mathcal{F} := \{A \subset \Omega \mid A \text{ abzählbar oder } A^c \text{ abzählbar}\}$.

- (a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F} = \sigma(\{\omega\} \mid \omega \in \Omega)$. Welches Mengensystem ist dies, falls Ω abzählbar ist?
- (b) Sei nun Ω überabzählbar. Ist die Mengenfunktion

$$\mu: \mathcal{F} \rightarrow \{0, 1\}, \quad A \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ abzählbar,} \\ 1, & \text{falls } A^c \text{ abzählbar,} \end{cases}$$

ein Maß?