Prof. Dr. Reinhard Höpfner Simon Holbach

6. Übungsblatt zur Vorlesung

Stochastik I

im Sommersemester 2016

Aufgabe 22 (3+2+1 Punkte)

(a) Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $(E, \mathcal{E})$ ein messbarer Raum und $f\colon (\Omega, \mathcal{A}) \to (E, \mathcal{E})$ sowie $g\colon (E, \mathcal{E}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ messbare Abbildungen. Zeigen Sie, dass genau dann $g \in L^1(\mu \circ f^{-1})$ ist, wenn $g \circ f \in L^1(\mu)$ ist, und dass in diesem Fall gilt

$$\int_\Omega (g \circ f) d\mu = \int_E g d(\mu \circ f^{-1}).$$

(b) Nun sei $(E, \mathcal{E}) = (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ und ν sei ein weiteres Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$, bezüglich dessen μ eine Dichte besitzt, d.h. es gibt eine $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}([0,\infty))$-messbare Funktion $\varphi : \Omega \to [0, \infty)$ mit

$$\mu(A) = \int_A \varphi d\nu \quad \text{für alle } A \in \mathcal{A}.$$

Zeigen Sie, dass genau dann $f \in L^1(\mu)$ ist, wenn $f\varphi \in L^1(\nu)$, und dass in diesem Fall gilt

$$\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega f \varphi d\nu.$$

(c) Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X hierauf eine $\overline{\mathbb{R}}$-wertige Zufallsvariable, deren Verteilung $\mathcal{L}(X|P)$ eine Dichte φ bezüglich des Lebesguemaßes besitzt. Ferner sei $g\colon \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ Borel-messbar mit $g(X) \in L^1(P)$. Folgern Sie aus (a) und (b), dass

$$E(g(X)) = \int_{\mathbb{R}} g \varphi d\lambda\!\!\lambda.$$

Hinweis: Folgen Sie in (a) und (b) jeweils dem Beweisschema „Aufbau messbarer numerischer Funktionen".

Aufgabe 23 (4+1 Punkte)

(a) Sei $g\colon [0, \infty) \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Borel-messbare Funktion. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}, \quad x \mapsto g(|x|)$$

genau dann Lebesgue-integrierbar ist, wenn die Funktion

$$[0, \infty) \to \overline{\mathbb{R}}, \quad r \mapsto r^{d-1} g(r)$$

es ist, und dass in diesem Fall gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(|x|) \lambda\!\!\lambda(dx) = d \cdot \lambda\!\!\lambda(B_1^d(0)) \int_{(0,\infty)} r^{d-1} g(r) \lambda\!\!\lambda(dr),$$

wobei $B_r^d(x) = \{y \in \mathbb{R}^d \mid |x - y| < r\})$ die d-dimensionale Kugel um den Punkt $x \in \mathbb{R}^d$ mit Radius $r > 0$ ist.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 22 (a) und (b) sowie Aufgabe 19.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\lambda\!\!\lambda(B_1^d(0)) = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)},$$

indem Sie (a) auf die Dichte der d-dimensionalen Normalverteilung mit geeigneten Parametern anwenden.

Aufgabe 24 (1+0,5+0,5+1+2 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Wir betrachten das System

$$\mathcal{N}^\mu := \{N \in \mathcal{P}(\Omega) \,|\, \exists B \in \mathcal{A} \text{ mit } N \subset B \text{ und } \mu(B) = 0\}$$

aller Teilmengen von μ-Nullmengen. Ein Maßraum heißt *vollständig*, falls $\mathcal{N}^\mu \subset \mathcal{A}$ gilt. Um einen allgemeinen Maßraum zu vervollständigen, setzen wir

$$\overline{\mathcal{A}}^\mu := \{A \cup N \,|\, A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N}^\mu\} \qquad \text{und} \qquad \overline{\mu}\colon \overline{\mathcal{A}}^\mu \to [0, \infty], \quad A \cup N \mapsto \mu(A).$$

Zeigen Sie:

(a) $\overline{\mathcal{A}}^\mu$ ist eine σ-Algebra auf Ω.

(b) $\overline{\mu}$ ist wohldefiniert und ein Maß auf $\overline{\mathcal{A}}^\mu$ mit $\overline{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$.

(c) $(\Omega, \overline{\mathcal{A}}^\mu, \overline{\mu})$ ist vollständig.

(d) Es gilt $\overline{\mathcal{A}}^\mu = \{A \triangle N \,|\, A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N}^\mu\} = \sigma(\mathcal{A}, \mathcal{N}^\mu)$.

(e) Ist $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion, so gilt genau dann $f \in L^1(\Omega, \overline{\mathcal{A}}^\mu, \overline{\mu})$, wenn ein $g \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ existiert mit $f = g$ μ-fast überall (d.h. $\{f \neq g\} \in \mathcal{N}^\mu$), und in diesem Fall gilt

$$\int f d\overline{\mu} = \int g d\mu.$$

Hinweis: Begründen Sie, dass es genügt, diese Aussage für $f = \mathbb{1}_{\overline{A}}$ mit $\overline{A} \in \overline{\mathcal{A}}^\mu$ zu zeigen.

Bemerkung: $(\Omega, \overline{\mathcal{A}}^\mu, \overline{\mu})$ heißt *Vervollständigung* von $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Die Elemente von $\overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)}^{\boldsymbol{\lambda}}$ heißen *Lebesguemessbare* Mengen und das entsprechend fortgesetzte Maß $\overline{\boldsymbol{\lambda}}$ wird in der Literatur meistens wiederum Lebesguemaß genannt und in der Bezeichnung nicht vom Lebesguemaß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ unterschieden. In dieser Situation liefert diese Aufgabe insbesondere die Behauptungen in Bemerkung 2.13c) der Vorlesung.