Prof. Dr. Reinhard Höpfner | Simon Holbach

7. Übungsblatt zur Vorlesung

Stochastik I

im Sommersemester 2016

Aufgabe 25 (3 Punkte)

Beweisen Sie die Aussagen aus Beispiel 2.21 der Vorlesung.

Aufgabe 26 (2 Punkte)

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum, $(f_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ hierauf für jedes $i \in \{1, \dots, d\}$ eine Folge Borel-messbarer $\mathbb{R}$-wertiger Funktionen mit μ-stochastischem Limes $f^{(i)}$ und sei $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass

$$g\big(f_n^{(1)}, \dots, f_n^{(d)}\big) \xrightarrow{\mu\text{-stoch}} g\big(f^{(1)}, \dots, f^{(d)}\big).$$

Hinweis: Verwenden Sie Satz 2.23.

Bemerkung: Hiermit folgen die meisten elementaren Verknüpfungseigenschaften, die man von der Konvergenz in $\mathbb{R}$ gewohnt ist. Man wähle beispielsweise $g(x) = \sum_{i=1}^d x_i$, $g(x) = \prod_{i=1}^d x_i$ und so weiter.

Aufgabe 27 (3+1+1 Punkte)

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f, f_1, f_2, \dots : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ messbare Funktionen und $p \in [1, \infty)$.

(a) Es gelte $f_n \xrightarrow{\mu\text{-f.ü.}} f$ und es gebe $g, g_1, g_2, \dots \in L^1(\mu)$ mit

$$|f_n|^p \le g_n \ \mu\text{-f.ü. für alle } n \in \mathbb{N}, \quad g_n \xrightarrow{\mu\text{-f.ü.}} g \quad \text{sowie} \quad \int g_n d\mu \xrightarrow{n\to\infty} \int g d\mu.$$

Zeigen Sie, dass $f, f_1, f_2, \dots \in L^p(\mu)$ und $f_n \xrightarrow{L^p(\mu)} f$.

Sei nun $\mu(\Omega) < \infty$.

(b) Zeigen Sie, dass die Aussage aus (a) in dieser Situation auch gilt, wenn man die Konvergenz μ-fast überall jeweils durch μ-stochastische Konvergenz ersetzt.

(c) Folgern Sie, dass für $f, f_1, f_2, \dots \in L^p(\mu)$ gilt

$$f_n \xrightarrow{L^p(\mu)} f \qquad \Longleftrightarrow \qquad f_n \xrightarrow{\mu\text{-stoch.}} f \quad \text{und} \quad \|f_n\|_p \xrightarrow{n\to\infty} \|f\|_p.$$

Hinweis: Imitieren Sie in (a) den Beweis von Satz 2.17 und verwenden Sie für (b) Satz 2.23.

Aufgabe 28 (2+1+2+1 Punkte)

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $p \in [1, \infty)$. Für jedes $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ definieren wir

$$\mathcal{I}_{\mathcal{E}} := \{\mathbb{1}_A \mid A \in \mathcal{E}, \mu(A) < \infty\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die lineare Hülle $\operatorname{span}(\mathcal{I}_{\mathcal{A}})$ von $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ dicht in $L^p(\mu)$ liegt.

(b) Folgern Sie, dass $L^p(\mu) \cap L^q(\mu)$ für alle $q \in [1, \infty)$ dicht in $L^p(\mu)$ liegt.

(c) Sei nun speziell $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{G})$ mit einer Algebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{A}$, auf welcher μ σ-endlich ist. Zeigen Sie, dass $\operatorname{span}(\mathcal{I}_{\mathcal{G}})$ dicht in $L^p(\mu)$ liegt.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 13 sowie Teil (a) dieser Aufgabe.

(d) Seien μ nun σ-endlich und $\mathcal{A}$ abzählbar erzeugt. Folgern Sie aus (c), dass $L^p(\mu)$ separabel ist.

Erinnerung: Sind $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset L^p(\mu)$, so liegt $\mathcal{F}_1$ genau dann dicht in $\mathcal{F}_2$, wenn für jedes $f \in \mathcal{F}_2$ eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_1$ existiert mit $f_n \xrightarrow{L^p(\mu)} f$. Offensichtlich ist Dichtheit transitiv. Besitzt $L^p(\mu)$ eine abzählbare Teilmenge, welche dicht liegt in $L^p(\mu)$, so heißt $L^p(\mu)$ separabel. Für Separabilität ist hinreichend, dass eine abzählbare Teilmenge existiert, deren lineare Hülle dicht liegt.

Abgabe am **Montag, den 13.6.2016** um 12:00 Uhr.