Prof. Dr. Reinhard Höpfner Simon Holbach

8. Übungsblatt zur Vorlesung

Stochastik I

im Sommersemester 2016

Aufgabe 29 (3 Punkte)

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f \in L^1(\mu)$. Zeigen Sie, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $A \in \mathcal{A}$ existiert mit $\mu(A) < \infty$ und $\left|\int_\Omega f d\mu - \int_A f d\mu\right| < \varepsilon$.

Aufgabe 30 (2+2 Punkte)

(a) Sei ν das Zählmaß auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ und sei $f\colon \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass genau dann $f \in L^1(\nu)$ gilt, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ absolut konvergiert und dass dann gilt

$$\int_{\mathbb{N}} f d\nu = \sum_{n=1}^\infty f(n).$$

(b) Seien nun $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und hierauf $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer messbarer numerischer Funktionen. Zeigen Sie ohne direkte Verwendung des Satzes von der monotonen Konvergenz, dass

$$\int_\Omega \sum_{n=1}^\infty g_n d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_\Omega g_n d\mu \in [0, \infty].$$

Aufgabe 31 (3 Punkte)

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X hierauf eine nichtnegative reelle Zufallsvariable, deren Verteilungsfunktion wir mit F bezeichnen. Zeigen Sie, dass

$$E(X^n) = \int_{(0,\infty)} n x^{n-1}(1 - F(x))\lambda\!\!\lambda(dx).$$

Aufgabe 32 (4+2 Punkte)

Seien $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und $\triangle := \{(\omega, \omega) \,|\, \omega \in \Omega\}$ die Diagonale im Produktraum $\Omega \times \Omega$.

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden drei Bedingungen äquivalent sind:

  (i) Es gibt ein abzählbares $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ mit der Eigenschaft, dass für alle verschiedenen $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ ein $C \in \mathcal{C}$ existiert, welches ω_1 enthält, aber nicht ω_2.

  (ii) Es gilt $\triangle \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$.

  (iii) Es gibt ein abzählbares $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ mit der Eigenschaft, dass $\sigma(\mathcal{E})$ alle Einpunktmengen enthält.

  Hinweis: Um „(i)⇒(ii)“ zu zeigen, empfiehlt es sich, Δ^c zu betrachten. Für „(ii)⇒(iii)“ können Sie Aufgabe 3 und Hilfssatz 4.5 der Vorlesung benutzen. Zeigen Sie „(iii)⇒(i)“ per Dynkin-Schluss.

(b) Es gelte $\triangle \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ und P sei ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Zeigen Sie, dass genau dann $(P \otimes P)(\triangle) = 1$ gilt, wenn P ein Dirac-Maß ist.

Abgabe am Dienstag, den 21.6.2016 um 12:00 Uhr.