11. Übungsblatt zur Vorlesung

Stochastik I

im Sommersemester 2016

Aufgabe 40 (2+2 Punkte)

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und hierauf $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger reeller Zufallsvariablen. Zeigen Sie:

(a) Konvergiert die Folge $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ P-fast sicher gegen eine reelle Zufallsvariable, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} P(|X_k| > \varepsilon k)$ für alle $\varepsilon > 0$.

(b) Gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$P(X_k = k+1) = P(X_k = -(k+1)) = \frac{1}{2(k+1)\log(k+1)}, \quad P(X_k = 0) = 1 - \frac{1}{(k+1)\log(k+1)},$$

so erfüllt $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ das schwache, aber nicht das starke Gesetz der großen Zahl.

Aufgabe 41 (4 Punkte)

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und hierauf $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger und identisch verteilter nichtnegativer Zufallsvariablen mit $X_1 \notin L^1(P)$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{n\to\infty} \infty \quad P\text{-fast sicher.}$$

Hinweis: Wenden Sie den Satz von Kolmogorov an auf geeignet trunkierte Zufallsvariablen.

Aufgabe 42 (4 Punkte)

Seien E ein metrischer Raum, $Q, Q_1, Q_2, \ldots$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(E, \mathcal{B}(E))$ und $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_b(E)$ dicht in $\mathcal{C}_b(E)$ bzgl. der Supremumsnorm. Zeigen Sie, dass aus

$$\int f dQ_n \xrightarrow{n\to\infty} \int f dQ \quad \text{für alle } f \in \mathcal{C}$$

bereits $Q_n \xrightarrow{w} Q$ folgt.

Aufgabe 43 (1+1+2 Punkte)

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und hierauf $X, X_1, X_2, \ldots$ und $Y, Y_1, Y_2, \ldots$ Folgen von Zufallsvariablen mit Werten in einem metrischen Raum E.

(a) Es gelte $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, Y)$ in $E \times E$. Zeigen Sie, dass dann auch $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ und $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$ in E.

(b) Es gelte $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ und $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$ in E. Zeigen Sie:

  (i) Im Allgemeinen gilt nicht $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, Y)$ in $E \times E$.

  (ii) Sind jedoch X und Y unabhängig und sind für alle $n \in \mathbb{N}$ jeweils X_n und Y_n unabhängig, so gilt auch $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, Y)$.