Stochastik-Praktikum **WS 2016/17**

Prof. Dr. Matthias Birkner
Dr. Iulia Dahmer / M.Sc. Frederik Klement

Blatt 3

Aufgabe 1 (1 + 1 + 1 Punkte)

Wir betrachten die folgenden Funktionen:

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\rho(x)}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\rho(x)}{\sqrt{2}} + \pi/4\right)$

wobei wir mit $||\cdot||$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^2$ bezeichnen und $\rho(x) := \sqrt{4x_1^2 + x_2^2}$ für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

a) Erstellen Sie für die Funktionen f perspektivische Plots. Für die Funktion soll der Graph aus der Standardperspektive in einem Koordinatensystem groß auf einer Seite zu sehen sein. Auf einer weiteren Seite soll der Funktionsgraph mit vier verschiedenen Drehwinkeln (Drehung in der Ebene und Kippen mit Azimuthwinkel) maßstabs- und rahmenlos gezeichnet werden.

b) Erstellen Sie für die Funktion einen Imageplot. Wählen Sie eine geeignete Farbpaletten. Ab welcher Anzahl an benutzten Farben ändert sich die Darstellung nicht mehr sichtbar (bei dem gewählten Gitter)?

c) Erstellen Sie schließlich einen Konturplot. Wählen Sie eine angemessene Einteilung der Niveaulinien.

Achten Sie bei allen Grafik auf

- aussagekräftige Titel,
- passende Beschriftung der Achsen,
- eine geeignete Wahl der Achsenausschnitte
- und eine geeignete Wahl der Gitterpunkte.

Aufgabe 2 („Wo ist es in Rheinland-Pfalz am windigsten?“, 1 Punkte)

Die Datei *wind.txt* enthält $149260 = 340 \times 439$ Werte der mittleren Windgeschwindigkeit (in m/s in 120m Höhe über dem Boden) für Orte, die auf einem rechteckigen Gitter (340 Maschen in West-Ost-Richtung, 439 Maschen in Süd-Nord-Richtung) angeordnet sind, das Rheinland-Pfalz überdeckt (die Roh-Daten entstammen `http://www.windatlas.rlp.de`, die Auflösung wurde für die Zwecke dieser Aufgabe herabgesetzt). Beispielsweise mittels

w < − matrix(scan(”wind.txt”), nrow=340)

können Sie diese einlesen und in eine 340×439-Matrix verwandeln. Beachten Sie: Gittermaschen, die nicht vollständig in Rheinland-Pfalz liegen, haben hierbei als Eintrag keinen numerischen Wert, sondern `NA`.

Erzeugen Sie eine aussagekräftige 2-dimensionale, farbkodierte Grafik (etwa mit *image* oder *filled.contour*), die diese Daten zeigt und eine anschauliche Antwort auf die im Aufgabentitel genannte Frage gibt. (Wählen Sie die Farbskala und -zuordnung geeignet, sie können z.B. zunächst mit *plot(ecdf(w))* und *hist(w)* anschauen, welche Werte wie oft vorkommen).

Aufgabe 3 (1 + 2 + 2 Punkte)

Sie haben in der Vorlesung gelernt, dass die Verteilungsfunktion F_P einer Wahrscheinlichkeitsmaßes P auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ gegeben ist durch

$$F_P : \mathbb{R} \to [0,1], F_P(x) = P((-\infty, x]).$$

Unsere Version der Quantilfunktion F_P^{-1} war gegeben durch

$$F_P^{-1} : [0,1] \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}, F_P^{-1}(t) := \inf\{x : F_P(x) \geq t\}.$$

Diese erfüllt die Eigenschaft, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ und $t \in [0,1]$ gilt

$$F_P^{-1}(t) \leq x \Leftrightarrow t \leq F_P(x). \tag{1}$$

Sei nun U eine auf $[0,1]$ Zufallsvariable, dann besitzt $X := F_P^{-1}(U)$ die Verteilung P, denn aufgrund von (1) gilt,

$$P_X((-\infty, x]) = P_U(\{t : F_P^{-1}(t) \leq x\}) = P_U([0, F_P(x)]) = F_P(x).$$

Somit erlaubt uns die Relation (1) Zufallsvariablen mit Verteilung P aus uniformverteilten Zufallsvariablen zu simulieren, dies wird auch Inversionsmethode genannt.

a) Verwenden Sie die Inversionsmethode um exponentialverteilte Zufallsvariablen zu simulieren. Schreiben Sie dazu zuerst eine Funktion *quantil_exp(t,λ)*, welche für $t \in [0,1)$ and $\lambda > 0$ den Wert $F_P^{-1}(t)$ mit $P := \text{Exp}_\lambda$ berechnet (ohne Verwendung von *qexp* natürlich). Verwenden Sie für die Plots *type* = " *l* ".

b) Simulieren Sie 1000 Zufallsvariablen für $\lambda = \frac{1}{2}$ und vergleichen Sie die daraus gewonnene empirische Verteilungsfunktion mit der theoretischen Verteilungsfunktion F_p in dem Sie beide zusammen in einen Plot mit unterschiedlichen Farben zeichnen lassen. Verwenden Sie hierbei als x-Achse die Werte von 0 bis 10 mit Schrittlänge 10^{-1}. Ergänzen Sie den Plot um eine passende Beschriftung der Achsen, eine Legende und einen Titel.

c) Führen Sie die Aufgaben **a)** und **b)** für die geometrische Verteilung $Geom_p$ aus. Nennen Sie die Funktion, welche das Quantil berechnet, *quantil_geom*(t, p) (ohne Verwendung von *qgeom*). Für die Simulationen und den Plot verwenden Sie bitte den Parameter $p = 0.2$. Verwenden Sie *type* = " *s* " (Warum ist dies im Fall der geometrischen Verteilung die bessere Wahl? Warum ist *type* = " *S* " keine gute Wahl?).

Abgabe: 10 Uhr, 14.11.16