

Aufgabe 1 (2 + 2 Punkte)

Bei der Pokervariante Texas Hold'em erhält jeder Spieler in der ersten Runde aus einem Stapel von 52 Karten zunächst zwei Karten, danach werden innerhalb von drei weiteren Runden zuerst drei Karten und danach jeweils eine Karte offen in die Mitte gelegt, sodass am Ende dort fünf Karten liegen. Es gewinnt der Spieler, welcher aus diesen fünf und seinen zwei eigenen Karten die Kartenkombination mit dem höchsten Wert legen kann. Die 52 Karten setzen sich folgendermaßen zusammen: Es gibt die folgenden Kartenwerte 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Bube, Königin, König und Ass, wobei es jeden Wert genau einmal in jeder der Farben ♣, ♠, ♥ und ♦ gibt.

- Einer der häufigsten Kombination ist das „Paar“, es besteht aus zwei Karten mit demselben Kartenwert, wie z.B. (♥, 10) und (♠, 10). Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter den sieben vom Stapel gezogenen Karten mindestens ein „Paar“ befindet. Simulieren Sie dazu 10^4 Ziehungen von sieben Karten und zählen Sie, wie häufig mindestens ein „Paar“ gezogen worden ist.
- Die wertvollste Kombination ist der „Royal Flush“, dieser besteht aus den Karten 10, Bube, Königin, König und Ass, wobei alle Karten dieselbe Farben haben müssen. Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit einen „Royal Flush“ zu bekommen empirisch, indem Sie 10^6 die Ziehung simulieren.

Hinweis: Um die Ziehungen zu simulieren, können Sie den Befehl `sample` verwenden, um sieben Zahlen zwischen 1 bis 52 ohne Zurücklegen zu ziehen. Die Zahl x entspricht dann der Karte mit Wert $x \bmod 13$ und Farbe $\lceil x/13 \rceil$. Die Befehle `sort` and `intersection` können auch behilflich sein.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

In Aufgabe 6 von Blatt 0 der Theorieübung wurde gefragt, mit welcher Wahrscheinlichkeit beim Wichteln keiner der $k = 30$ Studenten seinen eigenen Namen aus dem Beutel zieht. Wir wollen diese Wahrscheinlichkeit durch Simulationen empirisch schätzen und die daraus resultierende Schätzung mit dem theoretischen Wert $p_k = \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i}{i!}$ vergleichen, hierbei sind wir besonders an dem Fehler unserer empirischen Schätzung interessiert.

Siehe Rückseite

Sei S_n die Schätzung passierend auf n Simulationen. Simulieren Sie S_n selbst jeweils 100 mal für die Werte $n = 2 \cdot 10^{2i-1}$ mit $i = 1, 2, 3$. Speichern Sie für jede der 100 Simulationen von S_n den Fehler $S_n - p_k$ in einen gemeinsamen Vektor x_i^k . Erstellen Sie aus x_i^k ein Histogramm. Berechnen Sie außerdem die empirische Standardabweichung σ_i^k des Fehlers mit dem Befehl `sd` und zeichnen Sie in das Histogramm die Dichte der Normalverteilung $\mathcal{N}(0, \sigma_i^k)$. Zeichnen Sie auch einen Plot mit den Werten $\sqrt{n_i}$ als x -Achse und $\frac{1}{\sigma_i^k}$ als y -Achse (Was ist das Verhältnis zwischen n_i und σ_i^k ?). Zeichnen Sie die drei Histogramme und den Plot in ein Bild. Wiederholen Sie dies für $k = 90$ und $k = 200$.

Aufgabe 3 (1 + 1 + 1 Punkte)

Bei einem Glücksspiel setzen Sie in jeder Runde einen von Ihnen gewählten Betrag auf Rot oder Schwarz. Sie verlieren Ihren Einsatz mit einer Wahrscheinlichkeit von $p \in (0, 1)$ und erhalten mit einer Wahrscheinlichkeit von $1 - p$ den doppelten Einsatz zurück. Sie starten das Spiel mit einem Startkapital K_0 und brechen das Spiel ab, wenn Sie das Vermögen K erreicht haben oder bankrott gegangen sind.

Es bezeichnen K_n Ihr Vermögen nach Spielrunde n und X_n Ihren Einsatz in der n -ten Spielrunde. Betrachten Sie folgende Strategien:

- $X_n = \mathbf{1}_{\{0 < K_{n-1} < K\}}$,
- $X_n = K_{n-1}$,
- $X_n = \lceil \frac{K_{n-1}}{2} \rceil$.

Simulieren Sie jeweils die drei Spielstrategien mit Hilfe von R und 1000 mal für die Werte $K_0 = 50$ und $K = 100$ bzw. $K = 200$ und zwar für die Wahrscheinlichkeiten $p_1 = 18/37$ (die Wahrscheinlichkeit beim Roulette, dass Schwarz gewinnt), $p_2 = 0.5$ und $p_3 = 0.75$. Geben Sie die relativen Häufigkeiten der gewonnenen Spiele aus. (Wann lohnt sich welche Strategie?)

Abgabe: 10 Uhr, 21.11.16