Stochastik-Praktikum **WS 2016/17**

Prof. Dr. Matthias Birkner
Dr. Iulia Dahmer / M.Sc. Frederik Klement

Blatt 9

Aufgabe 1 [QQ-Plots](1 + 1 Punkte)
QQ-Plots sind ein graphisches Mittel, um die empirische Verteilung zweier Stichproben miteinander zu vergleichen. Handelt es sich bei $r_1, ..., r_n$ und $s_1, ..., s_n$ um zwei gleich große Stichproben, dann sortiert `qqplot` die Stichproben und erstellt einen Punkt-Plot mit n Punkten, wobei der i-te Punkt die Koordinaten

$$(x_i, y_i) = (\hat{F}_r^{-1}(r_{[i]}), \hat{F}_s^{-1}(s_{[i]}))$$

besitzt. $\hat{F}_r^{-1}$ und $\hat{F}_s^{-1}$ sind hierbei jeweils die empirischen Quantilfunktionen und $r_{[i]}, s_{[i]}$ jeweils der i-kleinste Wert der Stichproben. Liegen die Punkte des QQ-Plots annäherend auf der Gerade $x = y$, so ist dies ein Indiz dafür, dass die Stichproben diesselbe Verteilung besitzen. Liegen Sie auf einer anderen Gerade, so sind sich die Verteilungen ähnlich, sind aber anders skaliert.

a) Es seien $U \sim \text{Unif}_{[0,1]}$, $W \sim \text{Unif}_{[0,2]}$ und $B \sim \beta(3, 1)$. Erzeugen Sie jeweils 100 Stichproben von U,W, B und erstellen Sie einen QQ-Plot für U und W sowie für U und B. Ergänzen Sie beide Plots um die Gerade $x = y$ mithilfe von `abline`. Zeichnen Sie beide Plots auf eine Seite.

b) Der QQ-Plot des Befehls `qqnorm` vergleicht die Verteilung einer Stichprobe mit der theoretischen Standardnormalverteilung. Erzeugen Sie jeweils 100 Stichproben von $Z_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $Z_2 \sim \mathcal{N}(-1, 1)$, $Z_3 \sim \mathcal{N}(0, 0.5)$ und $Z_4 \sim \mathcal{N}(0, 2)$, danach erstellen Sie für jede Stichprobe einen QQ-Plot mit `qqnorm`. Fügen Sie jeweils die Gerade $x = y$ hinzu und zeichnen Sie alle vier Plots auf eine Seite. (Welchen Zusammenhang gibt es zwischen den Plots und der Verteilung der Stichprobe?)

Aufgabe 2 [Zentraler Grenzwertsatz] (1 Punkt)

Seien $X_1, X_2, ...$ Zufallszahlen, die nach dem selben Verteilungsgesetz unabhängig voneinander erzeugt wurden. Für eine große Klasse von Verteilungsgesetzen kann man Zahlen $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$ so wählen , dass für große $n \in \mathbb{N}$ die Zahl

$$S_n^* = \frac{X_1 + ... + X_n - \mu n}{\sqrt{n\sigma^2}}$$

ungefähr standardnormalverteilt ist. Man prüfe dies durch QQ-Plots, indem man 100 Simulationen erzeugt für $n = 1000$ (und finde ggf. die Zahlen μ, σ^2) für

- Die Bernoulliverteilung $Ber(p)$ mit $p = 0.6$.
- Die Exponentialverteilung $Exp(\lambda)$ mit Rate $\lambda = 2$.
- Die Cauchy-Verteilung (mit Skalenparameter 1).

Aufgabe 3 [Simulation der Brown'schen Bewegung] (2 Punkte)

Wir simulieren den Pfad einer Brown'schen Bewegung über das Zeitintervall $[0, T]$ auf einem diskreten Gitter der Schrittweite $\Delta > 0$.

a) Schreiben Sie eine Funktion in den Parametern T und Δ, die einen Vektor

$$B_0, B_\Delta, B_{2\Delta}, ..., B_{(M-1)\Delta}$$

mit den simulierten Werten eines Brown'schen Pfades an den Stellen $0, \Delta, ..., (M-1)\Delta$ ausgibt. Dabei ist $M := \lfloor (T/\Delta) \rfloor$ die Anzahl der Gitterpunkte. (Zum Abrunden verwenden Sie beispielsweise den Befehl `floor`.)

b) Nun sei $T = 1$. Simulieren Sie für verschiedene Werte von Δ je 9 zufällige Realisierungen der Brown'schen Bewegung und zeichnen Sie die Pfade verschiedenfarbig in ein Koordinatensystem, indem Sie zwischen den Werten an den Gitterpunkten linear interpolieren. Verwenden Sie die Werte $\Delta = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$ und kennzeichnen Sie die verschiedenen Schrittweiten in einer Legende.

c) Wir untersuchen, welcher Verteilung das zufällige Maximum eines Brown'schen Pfades genügt. Simulieren Sie dazu 1000 Brown'sche Pfade bis zum Zeitpunkt $T = 1$ mit Schrittweite $\Delta = 10^{-5}$. Erstellen Sie eine geeignet formatierte Graphik der empirischen Verteilungsfunktion der Maxima der 1000 Pfade.

Vergleichen Sie diese empirische Verteilungsfunktion mit der Funktion $x \mapsto \big(2\Phi(x) - 1\big) \vee 0$, wobei $\Phi(x) = (\sqrt{2\pi})^{-1} \int_{-\infty}^{x} \exp(-z^2/2)\, dz$.

d) Plotten Sie 100 simulierte Pfade der Brown'schen Bewegung ausgewertet bis zum Zeitpunkt $T = 0.2$ in ein Koordinatensystem. Verwenden Sie als Schrittweite $\Delta = 10^{-6}$. Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen $(0, T] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{2x \log(\log(\frac{1}{x}))}$ bzw. $x \mapsto -\sqrt{2x \log(\log(\frac{1}{x}))}$ in die Graphik. Interpretieren Sie die Zeichnung.

Aufgabe 4 [Zweidimensionale Brown'sche Bewegung] (3 Punkte)

Wir simulieren die zweidimensionale Brown'sche Bewegung, das heißt einen zweidimensionalen stochastischen Prozess, dessen Komponenten zwei voneinander unabhängige Standard-Brown'sche Bewegungen sind. Dabei interessieren wir uns für die Verteilung des zufälligen Ortes, an dem zum ersten Mal der Kreis um den Ursprung mit Radius $r > 0$ verlassen wird.

a) Schreiben Sie eine Funktion in den Parametern Δ und r, die einen zufälligen zweidimensionalen Brown'schen Pfad mit Schrittweite Δ bis zum erstmaligen Verlassen des Kreises um den Ursprung mit Radius r simuliert. Sie können den Pfad der Einfachheit halber als Vektor komplexer Zahlen anstatt als Matrix mit zwei Spalten ausgeben. Komplexe Zahlen implementieren Sie in der Form `z = a + b * 1i`. Sie können dann Befehle wie `Re`(), `Im`() und `Arg`() nutzen.

b) Im Folgenden seien $r = 2$ und $\Delta = 10^{-4}$. Plotten Sie ein Achsenkreuz, in das Sie den Kreis um den Ursprung mit Radius r und einen zweidimensionalen Brown'schen Pfad bis zum Verlassen des Kreises einzeichnen. Heben Sie den Austrittsort graphisch hervor.

c) Simulieren Sie 300 Brown'sche Pfade wie in a) und speichern Sie jeweils den Austrittsort. Plotten Sie erneut ein Achsenkreuz und zeichnen Sie die Austrittsorte Ihrer 300 Pfade ein. Stellen Sie eine Vermutung auf, wie die Verteilung des zufälligen Austrittsortes aussehen könnte.

d) Überprüfen Sie Ihre Vermutung, indem Sie die Austrittswinkel (bezüglich der x-Achse) berechnen und in ein Histogramm einzeichnen. Wenn Sie komplexe Zahlen verwenden, können Sie entsprechend das Argument des Austrittsortes berechnen.

Abgabe:09.01.2017