Stochastik-Praktikum **WS 2016/17**

Prof. Dr. Matthias Birkner
Dr. Iulia Dahmer / M.Sc. Frederik Klement

Blatt 11

Aufgabe 1 [Simulation stochastischer Differentialgleichungen] (1 + 2 Punkte)

Wir betrachten eine stochastische Differentialgleichung der Form

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t,\ X_0 = x_0.$$

Dabei sind $x_0 \in \mathbb{R}$ der Startwert, $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Brown'sche Bewegung und b und σ reellwertige Funktionen, die den Drift bzw. die Diffusion des gesuchten stochastischen Prozesses $(X_t)_{t\in[0,T]}$ darstellen. Unter hinreichenden Voraussetzungen an b und σ erhalten wir eine Näherungslösung mit Hilfe des *Eulerschemas*,

$$X_0 = x_0, \qquad X_{i\triangle} = X_{(i-1)\triangle} + b(X_{(i-1)\triangle}) \cdot \triangle + \sigma(X_{(i-1)\triangle}) \cdot \sqrt{\triangle}\,\xi_i, \quad 1 \leq i \leq M := [T/\triangle]$$

mit unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen $\xi_i \sim \mathcal{N}(0,1)$; den Pfad erhält man dann durch lineare Interpolation von $(X_0, X_\triangle, \ldots, X_{M\triangle})$.

a) Implementieren Sie das Eulerschema als Funktion in den Parametern $T, x_0, b, \sigma, \triangle$ und $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_M)$, wobei $M = \lceil T/\Delta \rceil$ und $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_M \overset{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$. Ausgabe ist der Vektor $(X_0, X_\triangle, \ldots, X_{M\cdot\triangle})$.
Hinweis: Der Vektor ξ repräsentiert die Inkremente der zugrundeliegenden Brown'schen Bewegung $(B_t)_{t\geq 0}$, d.h. $B_{k\triangle} = \sum_{i=1}^{k} \sqrt{\triangle}\xi_i$.

b) Zuerst betrachten wir die stochastische Differentialgleichung der Form

$$dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma dB_t,\ X_0 = x_0,$$

dessen Lösung $(X_t)_{t\geq 0}$ Ornstein-Uhlenbeck-Prozess genannt wird. Simulieren Sie den Prozess mit Schrittweite $\Delta = 10^{-3}, x_0 = 3, \mu = 0, \sigma = 1, T = 1.5$ jeweils einmal für die Werte $\theta = -0.1, 1, 10$. Nutzen Sie hierbei für alle drei Simulationen dieselben Inkremente ξ. Plotten Sie die verschiedene Pfade in einen Plot, nutzen Sie dabei verschiedene Farben. Wiederholen Sie die drei Simulationen für $\sigma = 2$, wobei alle anderen Parametern, insbesondere die Inkremente ξ, gleich bleiben sollen. Erstellen Sie auch hier einen gemeinsamen Plot.

Hinweis: Wenn Sie `ylim=(-2,5)` für die Plots setzen, sollten alle Pfade gut zu sehen sein. Folgenden Einfluss haben die Parameter: Für positive θ bewegt sich X_t gegen μ, dies ist eine Folge des Drifts $\theta(\mu - X_t)dt$, welcher negative für $\mu < X_t$ und positiv für $\mu > X_t$ ist. Aber aufgrund des Diffusionsanteils σdB_t wird der Pfad immer wieder abgelenkt, der Einfluss dieses Effekts wächst mit σ. Für negative θ bewegt sich X_t weg von μ, der Diffusionsanteil lenkt den Pfad erneut ab.

Aufgabe 2 [Konvergenz des Eulerschemas] (1 + 2 Punkte)
Nun betrachten wir die geometrische Brown'sche Bewegung $(S_t)_{t\geq 0}$, welche gegeben ist durch

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t,\ S_0 = s$$

(sie spielt u.a. in der Finanzmathematik eine bedeutende Rolle). Wie bei gewöhnlichen Differenzialgleichungen lassen sich häufig keine expliziten Lösungen für stochastische Differenzialgleichungen finden, die geometrische Brown'sche Bewegung ist aber eine Ausnahme, sie besitzt die explizite Darstellung

$$S_t = S_0 \cdot e^{\sigma B_t - (\frac{\sigma^2}{2} - \mu)t}.$$

Letztere ermöglich uns die Konvergenz des Eulerschemas gegen die exakte Lösung in Abhängigkeit von $\triangle$ zu untersuchen. Bei numerischen Verfahren zur Lösung von stochastischen Differenzialgleichungen unterscheidet man hierbei zwischen zwei Arten der Konvergenzen. Wir sagen für die Zwecke dieser Aufgabe, ein Verfahren besitzt die schwache Konvergenzordnung $\kappa > 0$, falls es für jedes feste T ein $K > 0$ gibt, sodass

$$|\mathbf{E}[S_T] - \mathbf{E}[S_T^\triangle]| \leq K|\Delta|^\kappa, \tag{1}$$

hierbei ist S_T die exakte Lösung zum Zeitpunkt T und $S_T^\triangle$ die Approximation von S_T mit Schrittgröße $\triangle$ (die „volle" Definition der schwachen Konvergenzordnung ist etwas umfangreicher). Gilt sogar

$$\mathbf{E}[|S_T - S_T^\triangle|] \leq K|\Delta|^\kappa, \tag{2}$$

so besitzt das Verfahren die starke Konvergenzordnung κ. Man kann zeigen, dass das Eulerverfahren eine schwache Konvergenzordnung von $\kappa = 1$ und eine starke Konvergenzordnung von $\kappa = \frac{1}{2}$ besitzt.

a) Seien $T = 1, \mu = 1$ und $\sigma = 2$. Simulieren Sie die geometrische Brown'sche Bewegung für die Schrittgrößen $\Delta = 1/5, 1/10, 1/100, 1/500, 1/1000, 10^{-4}, s = 1$ jeweils 1000 mal und schätzen Sie aufgrund Ihrer Simulationen die Werte (1) und (2).

b) Erstellen Sie für Ihre Schätzungen von (1) und (2) jeweils einen Plot mit x-Achse $\log(\Delta)$. Ergänzen Sie den Plot von (1) um die Kurve $x \mapsto x$ und den Plot von (2) um die Kurve $x \mapsto \sqrt{x}$.

Abgabe: 23.01.2017