

Aufgabe 1 (Polya-Urne) (6 Punkte)

In einer Urne befinden sich anfangs S schwarze Kugeln und W weiße Kugeln, $S, W \in \mathbb{N}$. In jedem Schritt wird zufällig eine Kugel gezogen und zusammen mit $k \in \mathbb{N}$ weiteren Kugeln derselben Farbe zurückgelegt.

- Erstellen Sie eine Funktion `polya_urne(S, W, k, n)`, die n Schritte einer Polya-Urne simuliert. Die Funktion soll einen Vektor, der die Anzahl der schwarzen Kugeln in der i -ten Runde als i -te Komponente enthält, zurückgeben.
- Simulieren Sie für die Werte $S = 1, W = 1, k = 1, n = 750$ viermal die Polya-Urne und erstellen Sie auf einer Seite vier Koordinatensysteme mit Wertebereich von 0 bis 1 und einer x-Achse von 0 bis 750. Plotten Sie jeweils die relative Anzahl der schwarzen Kugeln als Funktion des Schrittes in ein Koordinatensystem. (Tipp: Verwenden Sie den Befehl

`par(mfrow = c(2, 2))`

um die Plots auf derselben Seite zu erstellen.)

- Mit X bezeichnen wir nun die relative Anzahl der schwarzen Kugeln nach 300 Zügen in einer Polya-Urne mit Startwerten $S = 1, W = 1$. Erstellen Sie ein Histogramm der Realisierungen von X für 1000 Simulationen für die Parameter

- $S_1 = 1, W_1 = 1, k_1 = 1,$
- $S_2 = 3, W_2 = 2, k_2 = 1,$
- $S_3 = 1, W_3 = 1, k_3 = 3,$
- $S_4 = 3, W_4 = 1, k_4 = 2.$

Zeichnen Sie jeweils den empirischen Mittelwert als vertikale Linie (*abline*) ein und zeichnen Sie alle vier Histogramme in einen Plot.

- Die Dichte der Beta-Verteilung $\beta_{a,b}$ ist für zwei positive Parameter $a > 0$ und $b > 0$ gegeben durch

$$f_{a,b}(x) = \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{\beta(a,b)},$$

wobei $\beta(a,b) := \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$ die Betafunktion ist. Zeichnen Sie in die obigen Histogramme jeweils die Dichte der Beta-Verteilung mit den Parametern $a_i = \frac{S_i}{k_i}$ und $b_i = \frac{W_i}{k_i}$ für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ein.

e) Ordnen Sie basierend auf den von Ihnen erstellten Histogrammen die folgenden Aussagen über die Dichte f_X von X den passenden Parameterbereichen zu:

<u>ungefähre Kurvenform:</u>		<u>Parameterbereich:</u>	
A:	steigend	i:	$S \geq W > k$
B:	Gleichverteilung	ii:	$S > k > W$
C:	unimodal	iii:	$k > S \geq W$
D:	U-förmig	iv:	$S = W = k$

Um Ihre Antwort zu übermitteln, ergänzen Sie Ihren Code um passende `print`-Ausgaben.
Bsp.: Wenn Sie glauben, dass f_X für die Parameter $S \geq W > k$ ungefähr steigend ist, ergänzen Sie Ihren Code um die Zeile `print("A, i")`.

Abgabe: 10 Uhr, 28.11.16