

Aufgabe 1 [Der Poissonprozess] (2 Punkte)

Sei $\lambda > 0$. Wir definieren einen zufälligen, $\mathbb{N}_0$ -wertigen Prozess $N_\lambda = (N_\lambda(t))_{t \geq 0}$ als Sprungprozess mit exponentiellen Wartezeiten, das heißt

$$N_\lambda(t) := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}},$$

wobei

$$T_n := \sum_{j=1}^n S_j \quad \text{mit unabhängigen } \text{Exp}(\lambda)\text{-verteilten Wartezeiten } S_j, j \geq 1.$$

Wir nennen N_λ *Poissonprozess mit Parameter λ* .

- Schreiben Sie eine Funktion in den Argumenten λ und T , die den Pfad eines Poissonprozesses mit Parameter $\lambda > 0$ auf dem Zeitintervall $[0, T]$ simuliert. Überlegen Sie sich dazu eine geeignete Koodierung. Beachten Sie etwa, dass alle Informationen über einen Poissonpfad in den Wartezeiten stecken.
- Erstellen Sie auf einer Seite vier Koordinatensysteme der Größe $[0, T] \times [0, K_\lambda]$ mit $K_\lambda := \sqrt{5(T\lambda + (T\lambda)^2)}$. Verwenden Sie die Werte $T = 15$ und $\lambda = 0.2, 0.5, 1$ bzw. 3 . Zeichnen Sie in jedes Koordinatensystem 6 simulierte Pfade des Poissonprozesses mit Parameter λ verschiedenfarbig ein. Um Sprungfunktionen zu zeichnen, wählen Sie den Parameter `type` im `plot`- bzw. `lines`- Befehl geeignet. Kennzeichnen Sie die Sprungstellen zusätzlich durch Punkte.
- Sei $T = 500$. Simulieren Sie für jeden der obigen vier Parameterwerte λ einen Pfad des Poisson-Prozesses über $[0, T]$ und zeichnen Sie jeweils
 - den Poisson-Pfad $t \mapsto N_t$ zusammen mit der Gerade $t \mapsto \lambda t$;
 - den Pfad von $t \mapsto \frac{1}{t} N_t$.

Was schließen Sie aus den Bildern?

Aufgabe 2 [Der Poissonprozess II] (2 Punkte)

Wir untersuchen nun die gemeinsame Verteilung der Zuwächse des Poissonprozesses auf zwei disjunkten Intervallen. Dazu betrachten wir den Poissonprozess mit Parameter $\lambda = 2$ bis zum Zeitpunkt $T = 10$ und die Zuwächse $N_{t_2} - N_{t_1}$ auf dem Intervall $[t_1, t_2]$ und $N_{s_2} - N_{s_1}$ auf dem Intervall $[s_1, s_2]$. Verwenden Sie die Werte $s_1 = 1$, $s_2 = 3$, $t_1 = 5$ und $t_2 = 8.5$.

Wir bezeichnen mit $\alpha_1(\mu)$ das untere und mit $\alpha_2(\mu)$ das obere $1/3$ -Quantil der Poissonverteilung $\mathcal{P}_\mu$ mit Parameter μ . (Es gilt also $\mathcal{P}_\mu\{[0, \alpha_1(\mu))\} \approx \mathcal{P}_\mu\{[\alpha_1(\mu), \alpha_2(\mu))\} \approx \mathcal{P}_\mu\{[\alpha_2(\mu), \infty)\} \approx 1/3$). Ferner setzen wir $\alpha_0(\mu) = 0$ und $\alpha_3(\mu) = \infty$.

Definiere nun für $j = 1, 2, 3$ das Ereigniss B_j , dass der Zuwachs $N_{s_2} - N_{s_1}$ zwischen den Quantilen $\alpha_{j-1}(\lambda(s_2 - s_1))$ und $\alpha_j(\lambda(s_2 - s_1))$ liegt,

$$B_j := \left\{ (N_{s_2} - N_{s_1}) \in \left[\alpha_{j-1}(\lambda(s_2 - s_1)), \alpha_j(\lambda(s_2 - s_1)) \right) \right\}.$$

Können Sie für die Größe des Zuwachses $N_{t_2} - N_{t_1}$ eine genauere Vorhersage treffen, wenn Sie wissen, welches der B_j eingetreten ist?

- Simulieren Sie einen Datensatz von 7500 Poissonpfaden. Speichern Sie die Zuwächse der 7500 Pfade auf dem Intervall $[s_1, s_2]$ und auf dem Intervall $[t_1, t_2]$ in einer 2×7500 - Matrix ab.
- Wir interessieren uns nun für die bedingte Verteilung des Zuwachses auf dem Intervall $[t_1, t_2]$ gegeben des Zuwachses auf dem Intervall $[s_1, s_2]$. Teilen Sie dazu Ihre Daten aus a) für den Zuwachs $N_{t_2} - N_{t_1}$ in drei Datensätze auf, je nachdem welches der Ereignisse B_1, B_2, B_3 eingetreten ist. Lösen Sie die Aufgabe möglichst elegant mit logischen Operationen. (Verwenden Sie zum Beispiel den Befehl `which`.)
- Um die bedingten Verteilungen $\{k\} \mapsto \mathbb{P}(N_{t_2} - N_{t_1} = k \mid B_j)$ anzunähern zeichne man für jeden der drei in b) erstellten Datensätze ein Histogramm der relativen Häufigkeiten. Erstellen Sie zum Vergleich ein Histogramm aller 7500 Daten der Zuwächse $N_{t_2} - N_{t_1}$ aus a). Man zeichne dann in alle 4 Histogramme die Wahrscheinlichkeitsgewichte der Poissonverteilung mit Parameter $\lambda(t_2 - t_1)$ ein. Interpretieren Sie: Wie hängen die Zuwächse des Poissonprozesses auf den Intervallen $[s_1, s_2]$ und $[t_1, t_2]$ voneinander ab?

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Ein Versicherungsunternehmen möchte mithilfe von stochastischen Simulationen sein Tarifmodell überarbeiten. Nach Auskunft der Entwicklungsabteilung des Unternehmens ist der zu versichernde Schaden in Euro den ein Kunde j im Jahr i bis zum 31.12 erleidet gegeben durch

$$X_i^j = \sum_{k=1}^{K_i^j} R_{i,k}^j + \sum_{k=1}^{G_i^j} S_{i,k}^j.$$

Dabei sollen K_i^j , G_i^j , $R_{i,k}^j$ und $S_{i,k}^j$ unabhängige Zufallsvariablen sein. Die kleinen Schäden $R_{i,k}^j$ sollen $\Gamma(0.2, 1000)$ verteilt sein, ihre Anzahl K_i^j soll Poisson-verteilt sein mit Parameter $\lambda = 5 \cdot 10^{-4}$. Die großen Schäden $S_{i,k}^j$ sollen $\Gamma(0.01, 1000)$ -verteilt sein, ihre Anzahl G_i^j soll Poisson-verteilt sein mit Parameter $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$. Wir nehmen an, dass alle Zufallszahlen unabhängig sind. Daneben nimmt die Entwicklungsabteilung an, dass die Schäden von verschiedenen Kunden und Jahren jeweils unabhängig sind.

Weiter wird angenommen, dass das Versicherungsunternehmen über die nächsten 50 Jahre eine feste Anzahl von M Kunden besitzt, welche jeweils am 1.1. des Jahres Ihren Beitrag a zahlen. Wie hoch muss der jährliche Betrag a pro Kunde sein damit die Wahrscheinlichkeit p_R für den Ruin des Unternehmens innerhalb der nächsten 50 Jahre kleiner als 1% ist? Wir sprechen vom Ruin des Unternehmens im Jahr i , falls die Bilanzsumme $B(i)$ des Jahres i negativ ist. Die Bilanzsumme ist gegeben durch:

$$B(i) = aM \cdot i - \sum_{k=1}^i \sum_{j=1}^M X_k^j.$$

Die Schätzung soll auf 1000 Simulationen passieren und für die Kundenzahlen $M = 10^i$ mit $i = 1, 2, \dots, 6$ durchgeführt werden. Erstellen Sie einen Plot mit Ihren Schätzungen in Abhängigkeit von $\log_{10}(M)$.

Anleitung: Für jeden festen Schadensverlauf bestimme man die Prämie A , die den Ruin innerhalb der nächsten 50 Jahre verhindert. Dann erzeuge man eine große Stichprobe von Schadensverläufen und ermittle denjenigen Wert a , sodass $A \geq a$ in 1% aller Fälle gilt (z.B. mit `quantile()`). Sie können bei der Simulation ein oder zwei For-Schleifen sparen, wenn Sie folgende Fakten verwenden: Gilt $Y_1 \sim Poi_\lambda$ und $Y_2 \sim Poi_\mu$ dann $Y_1 + Y_2 \sim Poi(\lambda + \mu)$. Gilt $Z_1 \sim \Gamma(b, p)$ und $Z_2 \sim \Gamma(b, q)$ dann $Z_1 + Z_2 \sim \Gamma(b, p + q)$. Um Stichproben von $\Gamma(b, q)$ zu erzeugen, verwenden Sie `rgamma(n, rate=b, shape=q)`.