Statistik für Informatiker **SS 2017**

Prof. Dr. Matthias Birkner
M.Sc. Frederik Klement

Blatt 4

Aufgabe 1: (2 + 2 Punkte)

a): Sei X exponentialverteilt mit Parameter 2 ($X \sim \mathrm{Exp}_2$). Bestimmen Sie:

$P(2 \leq X \leq 7)$, $P(X^2 - 13X + 30 \leq 0)$.

b): Sei U uniformverteilt auf $[-10, 10]$ ($U \sim \mathrm{Unif}_{[-10,10]}$). Bestimmen Sie:

$P(U^2 \geq 25, U \leq 0)$, $P(4 \leq (U-1)^2 \leq 16)$.

Aufgabe 2: (2 + 2 Punkte)
Die Verteilung einer eindimensionalen Zufallsvariable X ist eindeutig bestimmt durch seine Verteilungsfunktion:

$$F_X : \mathbb{R} \mapsto [0,1];\ F_X(t) = P(X \leq t).$$

Nutzen Sie diesen Fakt, um die folgenden Aussagen zu beweisen:

a): Sei $a < b$ und U eine auf $(a, b]$ uniformverteilte Zufallsvariable. Dann ist die Zufallsvariable $X := -\frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{U-a}{b-a}\right)$ für $\lambda > 0$ exponentialverteilt mit Parameter λ.

b): Seien $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ unabhängige, exponentialverteilte Zufallsvariablen mit Parametern $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n > 0$. Dann ist $\hat{Y} = \min\{Y_i; i = 1, 2, ..., n\}$ exponentialverteilt mit Parameter $\hat{\lambda} := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Hinweis: Es reicht, wenn Sie nur $t \geq 0$ betrachten. Versuchen Sie in Teil **b)** zuerst $P(\hat{Y} > t)$ zu berechnen.

Aufgabe 3: (3 Punkte)
Peter und Paul schauen gemeinsam fern. Es läuft „Rad des Glücks“. In der Endrunde bietet der Moderator dem Finalisten einen grünen und einen roten Umschlag an. Im Grünen sind a und im Roten sind b Euro enthalten. Über die Beträge a und b weiß man nur, dass es zwei unterschiedliche natürliche Zahlen sind. Der Finalist wählt einen der Umschläge, woraufhin dieser vom Moderator geöffnet wird. Bevor der zweite Umschlag geöffnet wird, darf sich der Finalist noch einmal umentscheiden, wenn er möchte.
Sehr zum Erstaunen von Paul behauptet Peter: „Ich kenne eine Methode, die es mir erlaubt mit einer Wahrscheinlichkeit $> \frac{1}{2}$, den Umschlag mit dem größeren Betrag zu wählen.“
Paul ist von den Socken. Peter wird konkreter:„Zuerst werfe ich eine faire Münze. Bei Kopf öffne ich grün und bei Zahl rot. Sei nun X die Zahl der Euro in dem geöffneten Umschlag. Ich werfe erneut meine faire Münze so lange bis zum ersten Mal Kopf kommt und setze Y :=„Anzahl meiner Würfe plus $\frac{1}{2}$“. Ist $Y \geq X$, dann wechsele ich den Umschlag.“
Beweisen Sie, dass Peter recht hat.

Aufgabe 4: (2 + 2 + 1 + 2 Punkte)
Wir betrachten das folgende einfache Modell für den Zerfall von radioaktivem Material. Wir nehmen an, dass das Material aus N Atomen besteht, welche wir gedanklich mit $1, 2, ..., N$ durchnummerieren. Das Atom i zerfällt hierbei nach einer zufälligen Zeit τ_i. Die Zerfallszeiten $(\tau_i)_{i=1}^N$ sind hierbei unabhängig voneinander und exponentialverteilt mit Parameter $p > 0$. Für ein festes $K \in \mathbb{N}$ und eine feste Zeitspanne $T > 0$ setzen wir für $k = 1, 2, ..., K$:

$$V_k^T := \sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{((k-1)T,kT]}(\tau_i).$$

Die Zufallsvariable V_k^T entspricht also der Zahl von Atomen, die im Zeitraum $((k-1)T, kT]$ zerfallen sind.

a): Schreiben Sie eine Funktion `zerfall(N,p,K,t)`, welche den Zerfall von $N =$ `N` Atomen simuliert mit Parameter $p =$ `p` und dann die $V_1^T, V_2^T, ..., V_K^T$ berechnet für $T =$ `t` und $K =$ `K`.

b): Simulieren Sie einmal die Zufallsvariable $V_1^T, V_2^T, ..., V_K^T$ mit $T = 7{,}5$,$K = 2500$, $N = 2{,}5 \cdot 10^6$ und $p = \frac{3{,}8}{TN}$. Erstellen Sie ein Histogramm der $V_1^T, V_2^T, ..., V_K^T$. Sorgen Sie mit `breaks = 0:(max(V)+1)-0.5` für eine gute Balkeneinteilung. Verwenden Sie `freq=F` und ergänzen Sie den Plot um die Wahrscheinlichkeiten $\mathrm{Poi}_{3,8}(\{k\})$ für $k = 0, 1, ..., $`max(V)` mit `points` und `dpois`.

Rutherfod, Geiger und Bateman haben in einem Forschungsartikel aus dem Jahre 1910, siehe [1], den Zerfall von radioaktiven Substanzen untersucht. Hierbei haben Sie in $I = 2608$ Zeitintervallen von jeweils 7,5 Sekunden gemessen, wieviele Partikel jeweils in den einzelnen Intervallen zerfallen sind. Ihre Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle enthalten:

k	I_k	k	I_k	k	I_k
0	57	5	408	10	10
1	203	6	273	11	4
2	383	7	139	12	0
3	525	8	45	13	1
4	532	9	27	14	1

Die Zahl I_k steht hierbei für die Zahl der Intervalle, in denen exakt k Partikel zerfallen sind.

c): Bestimmen Sie die Anzahl M, der beobachteten Zerfallsereignisse und berechnen Sie die mittlere Zahl $\hat{\lambda}$ von Zerfällen pro Zeitintervall.

d): Berechnen Sie für $k = 0, 1, ..., 9$ die Werte $\hat{I}_k = \mathrm{Poi}_{\hat{\lambda}}(\{k\})M$. Zeichnen Sie die Punkte $(k, I_k)_{k=0}^9$ und $(k, \hat{I}_k)_{k=0}^9$ in einem gemeinsamen Plot. Verwenden Sie hierbei unterschiedliche Farben und geben Sie den Plot eine passende Beschriftung. Fügen Sie eine passende Legende mit `legend` hinzu.

Achtung: Zusätzlich zur elektronischen Abgabe per Mail, drucken Sie bitte Ihren Code aus und reichen Sie diesen zusammen mit Ihrer restlichen Abgabe ein.

Abgabe: 10 Uhr 26.05.2017

Literatur

[1] Ernest Rutherford, Hans Geiger, and H Bateman. Lxxvi. the probability variations in the distribution of α particles. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 20(118):698–707, 1910.