

Aufgabe 1: (1 + 1 + 1 + 1 Punkte)

Wir betrachten ein **XOR**-Logikgatter mit Ausgabe G_1 , ein **AND**-Logikgatter mit Ausgabe G_2 und ein **OR**-Gatter mit Ausgabe G_3 . Alle drei Gatter verwenden als Eingabesignal die auf $\{0, 1\}^2$ uniform verteilte Zufallsvariable $X = (X_1, X_2)$. Die Beziehung zwischen Eingabe und Ausgabe wird durch folgende Tabelle beschrieben:

X_1	X_2	G_1	G_2	G_3
0	0	0	0	0
1	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	1	0	1	1

Drücken Sie folgende Ereignisse mithilfe der Ereignisse $\{X_1 = 1\}$, $\{X_2 = 1\}$ und den Mengenoperationen $\cup, \cap, \complement$ aus ($\complement$ = Komplement) und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit:

- a):** $\{G_1 = 1\}$
 b): $\{G_3 = 1\}$
 c): $\{G_2 = 0\}$
 d): $\{G_1 + G_2 = 0\}$

Hinweis: Das Ereignis $\{X = (1, 0)\}$ lässt sich ausdrücken als $\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 1\}^c$. Achten Sie auf die richtige Klammersetzung: $(A \cap B) \cup C \neq A \cap (B \cup C)$.

Aufgabe 2: (1 + 1 + 1 + 1 Punkte)

Auf einem Kongress treffen sich 120 Statistikexperten, davon beherrschen 80 Personen die Sprache R, 65 Python und 40 beides. Basierend auf einer Gleichverteilung wird eine Person ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten folgende Ereignisse ein?

- a):** Die Person beherrscht nicht Python.
 c): Die Person beherrscht Python aber nicht R.
b): Die Person beherrscht mindestens eine der beiden Sprachen.
 d): Die Person beherrscht nur eine der beiden Sprachen.

Hinweis: Nutzen Sie beispielweise die Ein-und-Ausschlussformel:

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$$

Aufgabe 3: (2 + 1 + 1 Punkte)

Die auf $\{0, 1\}^8$ gleichverteilte Zufallsvariable $X = (X_1, \dots, X_8)$ repräsentiert ein zufällig initiiertes Byte. Wir sind an der Verteilung von $S = \sum_{i=1}^8 X_i$ interessiert.

- a)** Schreiben eine Funktion `byte()`, die ein solches X generiert. **Hinweis:** Sie können X erzeugen, indem Sie zuerst eine gleichverteilte ganze Zahl zwischen 0 und 255 mit `sample` erzeugen und dessen Bitdarstellung mithilfe von `bitwAnd` und `bitwShiftR` extrahieren. Eine andere Möglichkeit ist `intToBits(x)[1:8]`.
b) Simulieren Sie X genau 10^4 mal, z.B. mit `replicate`, und berechnen Sie jeweils S mit `sum`.

- c) Erstellen Sie ein Histogramm mit `hist` für Ihre Simulationen von S , welches die relative Häufigkeit der erzeugten Werte wiedergibt. Nutzen Sie den Parameter `freq=T`. Verleihen Sie dem Histogramm die Überschrift *Binomialverteilung* mit `main` und geben Sie den Achsen Namen mit `xlab="Wert"` und `ylab="relative Häufigkeit"`. Sorgen Sie mit `breaks=0:9-0.5` für eine gute Balkeneinteilung.

Aufgabe 4: (1 + 1 + 2 Punkte)

Wir werfen eine Münze mit den Seiten Kopf und Zahl, solange bis zum ersten Mal Kopf erscheint. Bei jedem Wurf fällt Kopf mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$. Sei G die Anzahl der Würfe mit Ergebnis Zahl bis zum ersten Mal Kopf fällt. Wir sind an der Verteilung von G interessiert.

- a) Schreiben Sie mithilfe von `while` und `sample` eine Funktion `muenze(p)`, die die Folge von Münzwürfen bis zum ersten Erfolg simuliert und den von G angenommenen Wert zurückgibt.
- b) Simulieren Sie G genau 10^4 mal für $p = 0.6$.
- c) Berechnen Sie für $n = 0, \dots, 10$ die relative Häufigkeit h_n mit der G den Wert n in Ihren Simulationen aus b) annimmt. Plotten Sie $h = (h_0, \dots, h_{10})$ zusammen mit n mithilfe von `plot`, beschriften Sie die Achsen sinnvoll und geben Sie dem Plot die Überschrift *Geometrische Verteilung*.

Abgabe: 10 Uhr 05.05.2017