Prof. Dr. Achim Klenke Dr. Iulia Dahmer

1. Übung zur Vorlesung

„Einführung in die Stochastik“

im Wintersemester 2017/2018

Die Abgabe der Aufgaben ist in Zweiergruppen möglich.

Aufgabe 1: (1+2+2 Punkte)

Ein fairer Würfel wird fünfmal nacheinander geworfen. Wir betrachten die folgenden Ereignisse:

$A_1 :=$ “Die Augensumme aller Würfe ist neun.”
$A_2 :=$ “Der zweite Wurf ist ungerade und der vierte Wurf ist eine Primzahl.”
$A_3 :=$ “Die maximale gewürfelte Augenzahl ist fünf.”
$A_4 :=$ “Das Produkt über alle Augen ist gerade.”
$A_5 :=$ “Keine der Augenzahlen kommt doppelt vor.”

(a) Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum für das Experiment an.

(b) Beschreiben Sie die Ereignisse $A_1, ..., A_5$ formal.

(c) Berechnen Sie $P(A_1), ..., P(A_5)$ sowie $P(A_1 \cap A_4)$, $P(A_2 \cup A_3)$ und $P(A_3 \backslash A_1)$.

Aufgabe 2: (2+2+1+1 Punkte)

(a) Seien $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Ereignisraum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{A}$. Seien ferner

$$A := \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ für unendlich viele } n\}$$

und

$$B := \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ für alle bis auf endlich viele } n\}.$$

Zeigen Sie:

1) $A = \limsup_{n\to\infty} A_n$ und $B = \liminf_{n\to\infty} A_n$, wobei

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq k} A_n \qquad \text{und} \qquad \liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq k} A_n.$$

2) $\mathbb{1}_A = \limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}$, $\mathbb{1}_B = \liminf_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}$.
3) $B^\complement = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n^\complement \text{ für unendlich viele } n\}$.

Hinweis: Für eine beliebige Menge $A \subseteq \Omega$ ist die Indikatorfunktion $\mathbb{1}_A$ definiert durch

$$\mathbb{1}_A(\omega) := 1, \text{ falls } \omega \in A, \qquad \mathbb{1}_A(\omega) := 0, \text{ falls } \omega \in A^\complement.$$

(b) Eine Münze wird unendlich häufig geworfen. Geben Sie einen geeigneten Ergebnisraum an und beschreiben Sie die folgenden Ereignisse als Teilmengen dieses Ergebnisraumes:

$A =$ “Es fällt unendlich oft Zahl”
$B =$ “Nach endlich vielen Würfen fällt nur noch Zahl”.

Aufgabe 3: (Nord-Ost-Irrfahrt auf den Spuren Pascals) (2+2 Punkte)

(a) Ein Wanderer irrt durch $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$; er erhöht in jedem Schritt per fairem Münzwurf entweder seinen x_1- oder x_2-Wert um 1, d.h. er geht in jedem Schritt mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ nach Osten und mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ nach Norden. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sein Weg, wenn er in $(2,0)$ startet, die Menge $\{(3,2),(3,3)\}$ (d.h. mindestens ein Element dieser Menge) trifft.

(b) Eine Nordost-Irrfahrt mit Drift nach Norden: Was ist die Wahrscheinlichkeit des in (a) beschriebenen Ereignisses, wenn der in $(2,0)$ startende Irrfahrer von jedem Punkt aus mit Wahrscheinlichkeit $1/4$ nach Osten und mit Wahrscheinlichkeit $3/4$ nach Norden schreitet?

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Sei Ω überabzählbar. Sind

$$\mathcal{A}_1 := \{A \subseteq \Omega : A \text{ oder } A^{\complement} \text{ endlich}\}$$
$$\mathcal{A}_2 := \{A \subseteq \Omega : A \text{ oder } A^{\complement} \text{ abzählbar}\}$$

σ-Algebren? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

Abgabe: Montag, den 23.10.2017 bis 9:59.