Prof. Dr. Achim Klenke Dr. Iulia Dahmer

2. Übung zur Vorlesung

„Einführung in die Stochastik“

im Wintersemester 2017/2018

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Wir betrachten einen verfälschten, ansonsten handelsüblichen sechsseitigen Würfel. Die Wahrscheinlichkeit, damit eine bestimmte Zahl zu würfeln, sei proportional zu dieser Zahl (z.B. soll die 6 die drefache Wahrscheinlichkeit der 2 haben).

i) Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum für das Experiment „Der verfälschte Würfel wird drei mal geforfen“ an.

ii) Wie wahrscheinlich ist es, bei drei Würfeln nur gerade Zahlen zu würfeln?

iii) Wie wahrscheinlich ist es, bei drei Würfeln eine Augensumme von 16 zu erhalten?

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Gegeben sei der 4-elementige Wahrscheinlichkeitsraum $\Omega := \{a, b, c, d\}$. Ferner seien die folgenden Mengensysteme gegeben $\mathcal{A} := 2^\Omega$ und
$\mathcal{B} := \{\{a, b\}, \{d, c\}, \{a, c\}, \{b, d\}\}$.

i) Zeigen Sie $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{B})$.

ii) Geben Sie zwei Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ auf $\mathcal{A}$ an mit $\mathbb{P}_1 \neq \mathbb{P}_2$, die auf $\mathcal{B}$ übereinstimmen.

iii) Warum ist dies kein Widerspruch zum Eindeutigkeitssatz 1.24 aus der Vorlesung?

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Seien A und B Ereignisse mit Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{4}$ und $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$. Zeigen Sie, dass $\frac{1}{12} \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \frac{1}{3}$ gilt, und geben Sie je ein Beispiel für $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{12}$ und $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{3}$ an. Finden Sie entsprechende Schranken für $\mathbb{P}(A \cup B)$.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Mit $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ bezeichnen wir die Borelsche σ-Aögebra auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

i) Die Menge $\{[a, b] : a, b \in \mathbb{Q}, a \leq b\}$ der abgeschlossenen Intervalle mit rationalen Eckpunkten erzeugt $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

ii) Die Menge der kompakten Mengen in $\mathbb{R}$ erzeugt $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

iii) Die Menge $\mathcal{A} := \{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}$ allen Einpunktmengen in $\mathbb{R}$ erzeugt nicht $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Wie sieht $\sigma(\mathcal{A})$ aus?

Abgabe: Montag, den 30.10.2017 bis 9:59.