Prof. Dr. Achim Klenke Dr. Iulia Dahmer

3. Übung zur Vorlesung

„Einführung in die Stochastik“

im Wintersemester 2017/2018

Aufgabe 1: (4 Punkte)

i) Sei $s > 0$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) = \frac{s}{\pi(s^2 + x^2)}$$
eine Wahrscheinlichkeitsdichte definiert. Die zugehörige Verteilung heißt *Cauchyverteilung mit Parameter s.*

i) Seien Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung und $\alpha > 0$. Zeigen Sie, dass durch
$$F_\alpha(x) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{\alpha}{\sqrt{x}}\right)\right)\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$$
eine Verteilungsfunktion definiert wird, und berechnen Sie die zugehörige Dichtefunktion.

Aufgabe 2: (2+2 Punkte)

Aus großer Höhe wird ein Punkt auf das Einheitsquadrat $[0, 1] \times [0, 1]$ fallen lassen. Wir bezeichnen mit ω_1 die x-Koordinate und mit ω_2 die y-Koordinate des Puntkes. Mit welcher Wahscheinlichkeit besitzt die „zufällige Gleichung“ $Z^2 + \omega_1 Z + \omega_2 = 0$

a) zwei reelle Lösungen

b) genau eine Lösung?

Aufgabe 3: (3+1 Punkte)

(Banachsches Streichholzproblem) Der berühmte Mathematiker Stefan Banach hat in beiden Hosentaschen je eine Schachtel mit N Streichhölzern. Jedesmal, wenn er ein Streichholz anzünden möchte, greift er mit gleicher Wahrscheinlichkeit in eine der beiden Hosentaschen und nimmt sich ein Streichholz aus der Schachtel. Falls die Schachtel leer ist, wirft er beide Schachteln weg. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er genau k Streichhölzer wegwirft?

Aufgabe 4: (2+2 Punkte)

(Einschluss-Ausschluss-Formeln) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A_1, A_2, \ldots$ Ereignisse. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

i) $$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^n A_i\Big) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ \#I = k}} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big),$$

ii) $$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^n A_i\Big) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ \#I = k}} \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big).$$

Hinweis: Verwenden Sie vollständige Induktion über n.

Abgabe: Montag, den 06.11.2017 bis 9:59.