Prof. Dr. Achim Klenke Dr. Iulia Dahmer

4. Übung zur Vorlesung

„Einführung in die Stochastik“

im Wintersemester 2017/2018

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Von 100 Kugeln sind 20 blau, 30 grün und 50 gelb gefärbt. 10 Kugeln werden rein zufällig nacheinander ohne Zurücklegen gezogen.

a) Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum für das Experiment an.

b) Welches der beiden Ereignisse ist wahrscheinlicher:

   i) die erste gezogene Kugel ist blau
   ii) die zweite gezogene Kugel ist blau.

c) Welches der beiden Ereignisse ist wahrscheinlicher:

   i) 2 der gezogenen Kugeln sind blau, 3 sind grün und 5 sind gelb,
   ii) alle 10 gezogenen Kugeln sind gelb.

d) Begründen Sie ohne Rechnung die Identität

$$\sum_{(i,j,k)\in\mathbb{N}_0^3 : i+j+k=10} \binom{20}{i}\binom{30}{j}\binom{50}{k} = \binom{100}{10}.$$

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \le 0 \\ \frac{1}{2}x, & \text{falls } 0 < x \le 2 \\ 1, & \text{falls } x > 2 \end{cases}$$

und sei $Y := X^2$. Bestimmen Sie:

(i) $\mathbb{P}(\frac{1}{2} \le X \le \frac{3}{2})$,

(ii) $\mathbb{P}(Y \le X)$,

(iii) $\mathbb{P}(X + Y \le \frac{3}{4})$,

(iv) $\mathbb{P}(\sqrt{X} \le z)$, $z \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3: (1+1+2 Punkte)

(i) Es seien X eine reellwertige Zufallsvariable, die eine Dichte besitzt, und $x \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie $\mathbb{P}(X = x)$.

(ii) Es sei Y eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{R}^2$, welche ebenfalls eine Dichte besitzt. Ferner seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $A_{a,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = ax + b\}$ die Gerade mit Steigung a und y-Achsenabschnitt b. Berechnen Sie $\mathbb{P}(Y \in A_{a,b})$.

(iii) Es seien (U, V) gleichverteilt auf $[0,1] \times [0,1]$ und W gleichverteilt auf $[0,1]$. Entscheiden Sie, ob (U, V) und $(W, 1-W)$ dieselbe gemeinsame Verteilung bzw. dieselben Randverteilungen besitzen, und geben Sie jeweils die Wahrscheinlichkeitsdichte an, wenn diese existiert. [Hinweis: Verwenden Sie Aufgabenteil (ii) mit einer geeigneten Wahl von Y, a und b.]

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Sei π eine zufällige Permutation auf der Menge $\{1, \ldots, n\}$ (alle Permutation seien gleich wahrscheinlich).

(i) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass π keinen Fixpunkt besitzt (d.h. es existiert kein $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\pi(i) = i$). Was passiert bei $n \to \infty$?

(ii) X sei die Länge desjenigen Zyklus in π, der die 1 enthält. Wie sieht die Verteilung von X aus?

Abgabe: Montag, den 13.11.2017 bis 9:59.