
5. Übung zur Vorlesung
„Einführung in die Stochastik“
im Wintersemester 2017/2018

Aufgabe 1: (2+2 Punkte)

- i) Seien $\lambda > 0$ und $(T_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge geometrisch verteilter Zufallsvariablen mit Parametern $p_n = \frac{\lambda}{n}$. Zeigen Sie: Die Verteilungsfunktionen $F_n(x) = P(\frac{1}{n}T_n \leq x)$ von $\frac{1}{n}T_n$ konvergieren punktweise gegen die Verteilungsfunktion einer exponentialverteilten Zufallsvariablen.
- ii) Sei $W = \mathbb{N}_0$ oder $W = [0, \infty)$ und X eine Zufallsvariable mit Werten in W . Die Verteilung von X heißt *gedächtnislos*, falls $\mathbf{P}(X \geq x+y \mid X \geq x) = \mathbf{P}(X \geq y)$ für alle $x, y \in W$ gilt.

Sei nun X gedächtnislos. Zeigen Sie:

- (a) Ist $W = \mathbb{N}_0$, so ist X geometrischverteilt.
(b) Ist $W = [0, \infty)$, so ist X exponentialverteilt.

Aufgabe 2: (3 Punkte)

Seien X und Y reelle Zufallsvariablen. Setze

$$Z(\omega) := \begin{cases} \frac{X(\omega)}{Y(\omega)} & \text{falls } Y(\omega) \neq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass Z eine Zufallsvariable ist.

Aufgabe 3: (1+2+2 Punkte)

Für positive reelle Zahlen x ist die Gammafunktion definiert durch

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Sind $\alpha, \nu > 0$, so nennen wir eine reelle Zufallsvariable X Gamma-verteilt mit den Parametern α und ν (kurz $X \sim \Gamma_{\alpha, \nu}$), falls die Dichte von X durch

$$f_{\alpha, \nu}(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \alpha^\nu x^{\nu-1} e^{-\alpha x} \cdot \mathbb{1}_{[0, \infty)}(x)$$

gegeben ist.

- i) Zeigen Sie, dass durch $f_{\alpha, \nu}$ tatsächlich die Dichte einer Wahrscheinlichkeitsverteilung definiert wird.
- ii) Sei $X \sim \mathcal{N}_{0,1}$. Bestimmen Sie die Dichte von $|X|$ und zeigen Sie, dass $X^2 \sim \Gamma_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$.
- iii) Seien $X \sim \Gamma_{\alpha, \nu}$ und $c > 0$. Zeigen Sie, dass $cX \sim \Gamma_{\frac{\alpha}{c}, \nu}$.

Aufgabe 4: (3 Punkte)

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und A, B und C Ereignisse in $\mathcal{A}$. Es gilt:

$$\mathbb{P}[A] = 0.4, \mathbb{P}[B] = 0.3, \mathbb{P}[C] = 0.7, \mathbb{P}[A^c \cap B] = 0.1 \text{ und } \mathbb{P}[A \cap B \cap C^c] = 0.1 .$$

Bestimmen Sie:

- | | | |
|----------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| $a) \mathbb{P}[C A \cap B],$ | $b) \mathbb{P}[A \cap B^c A],$ | $c) \mathbb{P}[B^c \cup C A],$ |
| $d) \mathbb{P}[B^c \cup C^c A],$ | $e) \mathbb{P}[A \cap B C^c].$ | |

Abgabe: Montag, den 20.11.2017 bis 9:59.