
8. Übung zur Vorlesung
„Einführung in die Stochastik“
im Wintersemester 2017/2018

Aufgabe 1: (2+2+2+2 Punkte)

Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz folgender Zufallsvariablen:

- a) W ist eine uniform verteilte Zufallsvariable auf der Menge $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$ (d.h. W nimmt mit gleicher Wahrscheinlichkeit jeden Wert aus $[n]$ an).
- b) X ist eine hypergeometrisch verteilte Zufallsvariable mit Parametern S, W und n , i.e.

$$\mathbb{P}[\{X = s\}] = \frac{\binom{S}{s} \binom{W}{n-s}}{\binom{S+W}{n}}, \quad s \in \{\max(0, n-W), \dots, \min(S, n)\}.$$

- c) Y ist eine Zufallsvariable auf $\mathbb{R}$ mit der Dichte:

$$f_Y(t) = t \cdot \mathbf{1}_{[0,1]}(t) + \mathbf{1}_{(1, \frac{3}{2}]}(t).$$

- d) Z ist eine Zufallsvariable auf $\mathbb{R}$ mit Verteilungsfunktion:

$$F_Z(t) = \frac{1}{2}e^t \cdot \mathbf{1}_{(-\infty, 0)}(t) + \left(1 - \frac{1}{2}e^{-t}\right) \cdot \mathbf{1}_{[0, \infty)}(t).$$

Aufgabe 2: (3 Punkte)

Die Zufallsvariable Z sei auf dem Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ gleichverteilt. Zeigen Sie, dass die Zufallsvariablen $X := 1 + \sin Z$ und $Y := \cos Z$ nicht unabhängig sind, aber es gilt:

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y),$$

d.h. X und Y sind *unkorreliert*.

Aufgabe 3: (1+1+2 Punkte)

Seien $\alpha, \beta \in (0, 1)$ mit $\alpha + \beta = 1$. Wir betrachten eine Markovkette $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit Werten auf $E = \{0, 1\}$, der Startverteilung δ_0 und der Übergangsmatrix

$$A := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

- Bestimmen Sie die Gleichgewichtsverteilung π von X .
- Berechnen Sie die Eigenwerte von A .
- Berechnen Sie für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in E$

$$\left| \mathbb{P}_0[X_n = x] - \pi(\{x\}) \right|.$$

Aufgabe 4: (3 Punkte)

Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige auf dem Intervall $[0, 1]$ uniform verteilte Zufallsvariablen. Definiere nun eine Zufallsvariable T mit Werten in $\mathbb{N}$ durch

$$T := \min \left\{ N \in \mathbb{N} \left| \sum_{k=1}^N X_k > 1 \right. \right\}.$$

Bestimmen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}(T)$.

Hinweis Lösung 1: Zeigen Sie per Induktion, dass $\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n \leq 1) = \frac{1}{n!}$. Man rechnet Mehrfachintegrale vom Typ $\int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} g(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$ aus, indem man zunächst das innerste Integral ausrechnet (bei festen $x_1, \dots, x_{n-1}$), und dann sukzessive das dx_{n-1} -Integral bei festen $x_1, \dots, x_{n-2}$ und so weiter.

Hinweis Lösung 2: Zeigen Sie per Induktion, dass für $x \in [0, 1]$ die Dichtefunktion f_n von $X_1 + \dots + X_n$ ist gleich $\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$.

Abgabe: Montag, den 11.12.2017 bis 9:59.