
10. Übung zur Vorlesung
„Einführung in die Stochastik“
im Wintersemester 2017/2018

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins Neue Jahr!

Am Ende des Blattes finden Sie die zusätzlichen Aufgaben A - G zur Vertiefung des Stoffes, die nicht abgabepflichtig sind und die in den Übungen nicht besprochen werden.

Aufgabe 1: (2+2 Punkte)

Wir nehmen an, dass die Anzahl X der Druckfehler in einem Buch Poissonverteilt mit Parameter $\lambda > 0$ ist. Beim Korrekturlesen wird jeder Fehler unabhängig von den anderen mit einer Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$ gefunden.

- a) Wie ist die Anzahl Y der gefundenen Druckfehler verteilt?
- b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Buch genau n Druckfehler enthält, wenn beim Korrekturlesen genau k Fehler gefunden wurden ($n \geq k$)?

Aufgabe 2: (3 Punkte)

Eine Frau entscheidet sich, Kinder zu bekommen, bis sie einen Jungen bekommt. Wir nehmen an, dass die Wahrscheinlichkeit, ein blondes Kind zu bekommen, gleich p ist. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Frau genau k blonde Kinder bekommt (wir nehmen an, dass die Haarfarbe unabhängig vom Geschlecht ist). Was ist die erwartete Anzahl von blonden Kindern?

Hinweis: Bestimmen Sie zuerst die Verteilung der Anzahl N von Kindern und dann die Erzeugendefunktion der Zufallsvariable S , die die Anzahl von blonden Kindern angibt.

Aufgabe 3: (2+2 Punkte)

Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{N}_0$, $\lambda > 0$ und seien $T, Y_1, Y_2, \dots$ unabhängige $\mathbb{N}_0$ -wertige Zufallsvariablen mit

$$T \sim \text{Poi}(\lambda), \quad Y_i \sim \mu \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Sei $X := \sum_{i=1}^T Y_i$. Die Verteilung von X heißt *zusammengesetzte Poisson-Verteilung* mit Parametern λ und μ , kurz: $\text{CP}_{\lambda, \mu}$.

- a) Sei $\lambda_i := \lambda \mu(\{i\})$ und seien $Z_1, Z_2, \dots$ unabhängige Zufallsvariablen mit $Z_i \sim \text{Poi}_{\lambda_i}$. Zeigen Sie:

$$X \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{\infty} i Z_i.$$

- b) Zeigen Sie: Die geometrische Verteilung γ_p ist vom Typ $\text{CP}_{\lambda, \mu}$ und bestimmen Sie λ und μ .

Hinweis: Verwenden Sie a) mit $\lambda_i := \frac{(1-p)^i}{i}$.

Aufgabe 4: (2+2 Punkte)

- i) Sei Z_n ein Galton-Watson Prozess, so dass $Z_0 = 1$, $\mathbb{E}(Z_1) = \mu$ und $\mathbf{Var}(Z_1) = \sigma^2$. Bestimmen Sie $\mathbb{E}(Z_n)$ und $\mathbf{Var}(Z_n)$.
- ii) Seien X eine $\mathbb{N}_0$ -wertige Zufallsvariable mit Erzeugendenfunktion ϕ und $A_1, A_2, \dots$ Ereignisse mit gleicher Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[A_k] = r$ für ein $r \in (0, 1)$. Es seien $X, A_1, A_2, \dots$ unabhängig und $Z := \sum_{k=1}^X \mathbf{1}_{A_k}$. Man bestimme die Erzeugendenfunktion von Z unter der Bedingung $Z \geq 1$. Mit anderen Worten: Sei Y eine Zufallsvariable mit $\mathbb{P}[Y = k] = \mathbb{P}[Z = k | Z \geq 1]$. Man bestimme die Erzeugendenfunktion von Y .

Aufgabe A: Eine Münze wird so lange geworfen, bis zum ersten Mal W erscheint. Für $m, n \in \mathbb{N}$ sei A_n das Ereignis, dass genau beim n -ten Wurf erstmalig W erscheint und B_m das Ereignis „W fällt nicht unter den ersten m Würfeln“.

- Man drücke das Ereignis B_m durch die A_n aus.
- Man ordne den Ereignissen A_n die Wahrscheinlichkeiten 2^{-n} zu und berechne nun die Wahrscheinlichkeit von B_m für jedes $m \in \mathbb{N}$.
- Man drücke das Ereignis $B :=$ „W fällt nie“ durch die Ereignisse B_m aus und bestimme damit $\mathbb{P}(B)$.
- Man drücke B durch die A_n aus und bestimme damit $\mathbb{P}(B)$.

Aufgabe B: Zum Schulanfang haben sich $2n$ Mädchen und $2n$ Jungen angemeldet. Aus ihnen werden zwei gleichgroße Klassen gebildet. Die Zuordnung der Kinder erfolgt zufällig.

- a) Man gebe einen Wahrscheinlichkeitsraum für das Zufallsexperiment an.
- b) Man berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Klassen gleich viele Mädchen und Jungen enthalten.

Aufgabe C: Sei X eine Markovkette. Welche der folgenden Folgen von Zufallsvariablen sind auch Markovketten:

- X_{m+r} für $r \geq 0$,
- X_{2m} für $m \geq 0$,
- (X_n, X_{n+1}) für $n \geq 0$.

Aufgabe D: Seien X und Y unabhängige und auf $[0, 1]$ uniformverteilte Zufallsvariable. Seien ferner $U = \min\{X, Y\}$ und $V = \max\{X, Y\}$. Bestimmen Sie $\mathbb{E}(U)$ und $\mathbf{COV}(U, V)$.

Aufgabe E: Wir würfeln mit zwei unabhängigen Würfeln. $X_i, i = 1, 2$, sei die Augenzahl von Würfel i . Kann man die beiden Würfel so verfälschen, d.h. $p_j^{(i)} := \mathbb{P}(X_i = j), i = 1, 2, j = 1, \dots, 6$, so wählen, dass die Augensumme $X_1 + X_2$ jeden möglichen Wert mit gleicher Wahrscheinlichkeit annimmt?

Tipp: Vergleichen Sie die Nullstellen der Erzeugendenfunktionen von X_1 und X_2 mit denen der Erzeugendenfunktion von $X_1 + X_2$.

Aufgabe F: Seien $m \in \mathbb{N}$ und $p = (p_1, \dots, p_m)$ ein Wahrscheinlichkeitsvektor auf $\{1, \dots, m\}$. Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit Werten in $\{1, \dots, m\}$ und Verteilung p . Wir definieren eine $\mathbb{N}_0^m$ -wertige Zufallsvariable $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$ durch

$$Y_i := \#\{k = 1, \dots, n : X_k = i\} \quad \text{für } i = 1, \dots, m.$$

Man zeige, dass

$$\mathbb{P}[Y = k] = \text{Mul}_{n,p}(\{k\}) := \binom{n}{k} p^k$$

für $k = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{N}_0^m$ mit $k_1 + \dots + k_m = n$. Dabei ist

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k_1, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdots k_m!}$$

der *Multinomialkoeffizient* und $p^k = p_1^{k_1} \cdots p_m^{k_m}$. Die Verteilung $\text{Mul}_{n,p}$ auf $\mathbb{N}_0^m$ heißt *Multinomialverteilung mit Parametern n und p* .

Aufgabe G: Es sei $\alpha > 0$ und L eine Poi_α -verteilte Zufallsvariable. Seien ferner $X_1, X_2, \dots$ unabhängige Zufallsvariablen, die uniform im Einheitsintervall verteilt sind: $X_k \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$ für jedes k . Wir nehmen an, dass $\{L, X_1, X_2, \dots\}$ eine unabhängige Familie von Zufallsvariablen ist. Wir definieren dann $N = (N_t)_{t \in [0,1]}$ durch

$$N_t := \sum_{l=1}^L \mathbb{1}_{(0,t]}(X_l) \quad \text{für } t \in [0,1].$$

Für $m \in \mathbb{N}$ und $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_m$ setzen wir nun $\lambda_i = \alpha(t_i - t_{i-1})$. Man zeige:

$$(N_{t_i} - N_{t_{i-1}})_{i=1, \dots, m} \text{ ist unabhängig}$$

und

$$N_{t_i} - N_{t_{i-1}} \sim \text{Poi}_{\lambda_i} \quad \text{für alle } i = 1, \dots, m.$$

Dies ist gleichwertig damit, dass für jede Wahl $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\mathbb{P}[N_{t_i} - N_{t_{i-1}} = k_i \quad \text{für jedes } i = 1, \dots, m] = \prod_{i=1}^m \left(e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^{k_i}}{k_i!} \right).$$

Hinweis: Man setze

$$M_{n,i} := \#\{l \leq n : t_{i-1} < X_l \leq t_i\} = \sum_{l=1}^n \mathbb{1}_{(t_{i-1}, t_i]}(X_l)$$

und verwende Aufgabe A, um zu zeigen, dass $M_{n,i}$ multinomialverteilt ist.

Abgabe: Montag, den 08.01.2018 bis 9:59.