Prof. Dr. Achim Klenke Dr. Iulia Dahmer

11. Übung zur Vorlesung

„Einführung in die Stochastik“

im Wintersemester 2017/2018

Aufgabe 1: (3 Punkte)

Sei $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Galton-Watson Verzweigungsprozess mit Nachkommenverteilung $\mathbb{P}[X=0] = 1-\mathbb{P}[X=2] = 1-p$, $p > 1/2$ und mit $Z_0 = 1$. Berechnen Sie die Aussterbewahrscheinlichkeit von (Z_n).

Aufgabe 2: (1+1+2+2 Punkte)

Sei $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Galton-Watson Verzweigungsprozess mit Nachkommenverteilung $\mathbb{P}[X=0] = \mathbb{P}[X=2] = \frac{1}{2}$ und mit $Z_0 = 1$.

a) Bestimmen Sie die Erzeugendenfunktion von X.

b) Bestimmen Sie $q_n := \mathbb{P}[Z_n = 0]$ explizit für $n = 1, 2, 3, 4$.

c) Sei $r_n := n(1-q_n)$. Leiten Sie eine Rekursionsformel für r_n her.

d*) Zeigen Sie, dass $r_n \le 2 - \frac{2}{n}$ für $n \ge 2$ und $r_{n+1} \ge r_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Folgen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} r_n = 2$ gilt.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Seien $X_1, X_2, ...$ unabhängige reelle Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}[X_n = n] = \mathbb{P}[X_n = -n] = \frac{1}{2n\log n}$$

und

$$\mathbb{P}[X_n = 0] = 1 - \frac{1}{n\log n}$$

für $n \ge 2$ und $X_1 \in \mathcal{L}^2$. Man zeige: $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt das schwache Gesetz der großen Zahl, nicht aber das starke.

Aufgabe 4: (2+2 Punkte)

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von zentrierten Zufallsvariablen mit endlichen zweiten Momenten und der Eigenschaft, dass

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{\infty} |\mathbf{Cov}[X_n, X_m]| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Man zeige, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einem schwachen Gesetz der großen Zahl genügt.

Abgabe: Montag, den 15.01.2018 bis 9:59.