Prof. Dr. Achim Klenke Dr. Iulia Dahmer

12. Übung zur Vorlesung

„Einführung in die Stochastik“

im Wintersemester 2017/2018

Aufgabe 1: (2+2 Punkte)

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reelle Zufallsvariablen, so dass $\mathbb{E}[X_n] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Zeigen Sie:

a) Falls $\mathrm{Var}[X_n] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, dann $X_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ stochastisch.

b) Falls $\sum_{n\geq 1} \mathrm{Var}[X_n] < \infty$, dann $X_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ fast sicher.

Aufgabe 2: (2+2 Punkte)

a) Seinen $X_1, X_2 \dots$ unabhängige identisch verteilte reelle Zufallsvariablen. Es gebe ein $\alpha > 0$ so dass $\mathbb{E}[e^{|\alpha X_1|}] < \infty$. Seien $m := \mathbb{E}[X_1]$ und $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ (Voraussetzungen von Satz 5.7). Zeigen Sie: Es existiert ein $C > 0$ und ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass für alle $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ und alle $n \in \mathbb{N}$
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| > \varepsilon\right) \leq e^{-C\varepsilon^2 n}.$$

b) Folgern Sie: Für unabhängige $X_i \sim \mathcal{U}_{[-1,1]}$ gilt:
$$\frac{1}{n^\alpha} S_n \to 0 \text{ f.s. für } \alpha > \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 3: (2+2 Punkte)

Ein Unternehmen hat insgesamt N = 1000 Aktien ausgegeben. Deren Besitzer entschließen sich nach der Jahreshauptversammlung bei jeder Aktie mit einer Wahrscheinlichkeit $0 < p < 1$ zum Verkauf der Aktie. Diese Entscheidung fällen sie für jede Aktie unabhängig und unabhängig von den anderen Besitzern. Der Markt kann nun S = 50 Aktien aufnehmen, ohne dass der Kurs der Aktie fällt. Stehen weniger als s = 35 Aktien zum Verkauf, steigt der Kurs der Aktie.

a) Sei $p = 0.04$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich der Kurs der Aktie ändert ?

b) Wie groß darf p höchstens sein, damit der Kurs mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% nicht fällt.

Lösen Sie diese Aufgaben näherungsweise unter der Nutzung des zentralen Grenzwertsatzes und der **Tabelle auf der Rückseite**.

Aufgabe 4: (2+2 Punkte)

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes, dass
$$\frac{X_n - \lambda n}{\sqrt{\lambda n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{N}_{0,1} \text{ schwach}$$
falls $\lambda > 0$ und $X_n \overset{d}{=} \mathrm{Poi}_{n\lambda}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Folgern Sie, dass
$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{j=0}^{n} \frac{n^j}{j!} = \frac{1}{2}.$$

Abgabe: Montag, den 22.01.2018 bis 9:59.

Tabelle der Standardnormalverteilung $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}x$

Beispiel: $\Phi(1{,}47) = 0{,}92922$.

$z \backslash *$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0∗	0,5	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,5279	0,53188	0,53586
0,1∗	0,53983	0,5438	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2∗	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3∗	0,61791	0,62172	0,62552	0,6293	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4∗	0,65542	0,6591	0,66276	0,6664	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5∗	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,7054	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,7224
0,6∗	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,7549
0,7∗	0,75804	0,76115	0,76424	0,7673	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,7823	0,78524
0,8∗	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9∗	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0∗	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1∗	0,86433	0,8665	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,879	0,881	0,88298
1,2∗	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3∗	0,9032	0,9049	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4∗	0,91924	0,92073	0,9222	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5∗	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6∗	0,9452	0,9463	0,94738	0,94845	0,9495	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7∗	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,9608	0,96164	0,96246	0,96327
1,8∗	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9∗	0,97128	0,97193	0,97257	0,9732	0,97381	0,97441	0,975	0,97558	0,97615	0,9767
2,0∗	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,9803	0,98077	0,98124	0,98169
2,1∗	0,98214	0,98257	0,983	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,985	0,98537	0,98574
2,2∗	0,9861	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,9884	0,9887	0,98899
2,3∗	0,98928	0,98956	0,98983	0,9901	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4∗	0,9918	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5∗	0,99379	0,99396	0,99413	0,9943	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,9952
2,6∗	0,99534	0,99547	0,9956	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7∗	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,9972	0,99728	0,99736
2,8∗	0,99744	0,99752	0,9976	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9∗	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0∗	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,999
3,1∗	0,99903	0,99906	0,9991	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2∗	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,9994	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,9995
3,3∗	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,9996	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4∗	0,99966	0,99968	0,99969	0,9997	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5∗	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,9998	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6∗	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7∗	0,99989	0,9999	0,9999	0,9999	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8∗	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9∗	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0∗	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998