Prof. Dr. Achim Klenke Dr. Iulia Dahmer

13. Übung zur Vorlesung

„Einführung in die Stochastik“

im Wintersemester 2017/2018

Aufgabe 1: (2+1+2 Punkte)

a) Seien $X_1, ..., X_n$ unabhängig und normalverteilt mit Parametern μ und σ^2. Man zeige, dass

$$d_n^2 := \frac{1}{2(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2$$

ein erwartungstreuer Schätzer für σ^2 ist.

b*) Ist die Folge $\left(d_n^2\right)_{n \geq 2}$ von Schätzern konsistent?

c) Seien $X_1, ..., X_n$ unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter $\frac{1}{\theta}$, d.h. jedes X_i habe die Dichte $f_\theta(x) = \frac{1}{\theta}\exp(-\frac{x}{\theta})$ für $x \geq 0$ unter $\mathbb{P}_\theta$. Man zeige: Unter allen Schätzern für θ von der Form

$$\hat{\theta} = \frac{1}{c(n)} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

hat der Schätzer $\widetilde{\theta}$ mit $c(n) = n+1$ den kleinsten quadratischen Fehler. Ist $\widetilde{\theta}$ erwartungstreu?

Aufgabe 2: (2+2 Punkte)

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Bernoulli-Zufallsvariablen mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$. Seien weiter $T : \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ ein erwartungstreuer Schätzer für p und $\hat{T}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \hat{T} : \{0,1\}^n &\to \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S(n)} T(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)}), \end{aligned}$$

wobei $S(n)$ die Menge der Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$ ist. Zeigen Sie:

a) $\hat{T}$ hängt nur von der Summe $\sum_{i=1}^n x_i$ ab.

b) $\hat{T}$ ist wieder erwartungstreu und es gilt: $\mathbf{Var}_p(\hat{T}) \leq \mathbf{Var}_p(T)$.

Aufgabe 3: (3 Punkte)

Einem Produzenten von Elektromotoren ist bekannt, dass deren Lebensdauern einer Reyleigh-Verteilung (mit unbekanntem $\lambda > 0$) mit der Dichte

$$f_\lambda(x) = 2\lambda x e^{-\lambda x^2}, \; x \geq 0$$

genügen.

a) Berechnen Sie für n unabhängige Wiederholungen den Maximum-Likelihood-Schätzwert für λ.

b) Bei einer Kundenbefragung wurden die folgenden Lebensdauern (in Jahren) von 8 Motoren ermittelt:

$$5,6 \quad 6,4 \quad 4,8 \quad 4,2 \quad 7,2 \quad 8,9 \quad 6,0 \quad 5,4$$

Berechnen Sie hiermit den Maximum-Likelihood-Schätzwert für λ.

c) Schätzen Sie auf dieser Grundlage die Wahrscheinlichkeit, dass die Lebensdauer eines Motorsweniger als 6 Jahre beträgt.

Aufgabe 4: (2+2 Punkte)

Es seien $X_1, ..., X_n$ unabhängige, doppelt-exponentiell verteilte Zufallsvariablen mit Lageparameter $\mu \in \mathbb{R}$ und Skalenparameter $\sigma > 0$. Für $i = 1, ..., n$ hat X_i also die Dichte $f(x) = \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x-\mu|}{\sigma}}$.

a) Es seien $\sigma = 1$ und μ unbekannt. Zeigen Sie: Ein Maximum-Likelihood-Schätzer für μ ist von der Form $t(X_1, ..., X_n)$, wobei für $a = (a_1, ..., a_n)$ die Zahl $t(a)$ so ist, dass im Intervall $(-\infty, t(a)]$ ebenso viele der a_i liegen wie im Intervall $[t(a), \infty)$. ($t(a)$ ist also Stichprobenmedian von $(a_1, ..., a_n)$.) [Hinweis: Bis zu welchem Argument fällt die Funktion $\mu \mapsto |a_1 - \mu| + ... + |a_n - \mu|$, wenn sich μ den a_i von $-\infty$ her nähert?]

b) Es seien nun sowohl μ als auch σ unbekannt. Bestimmen Sie einen Maximum-Likelihood-Schätzer für σ.

Abgabe: Montag, den 29.01.2018 bis 9:59.

Die online-Plattform für Ihre HiWi-Bewerbung zum Sommersemester 2018 ist ab sofort geöffnet. Alle qualifizierten InteressentInnen werden um ihre Bewerbung gebeten.