
14. Übung zur Vorlesung
„Einführung in die Stochastik“
 im Wintersemester 2017/2018

Aufgabe 1: (1+2 Punkte)

- (a) Bei einer repräsentativen Umfrage über einen Flughafenbau in Mainz haben sich von 1005 Befragten 331 dafür ausgesprochen. Geben Sie ein 95%-Konfidenzintervall für den Bruchteil p der Bevölkerung, der diesem Projekt zustimmt. Approximieren Sie mit der Normalverteilung.
- (b) Die physikalische Fakultät in Finsdorf hat im vergangenen Jahr Untersuchungen über die Größe ϑ der Erdbeschleunigung (in der Einheit $\frac{m}{s^2}$) angestellt. Nach den vorliegenden Messungen ergab sich als 95%-Konfidenzintervall $A := [9, 7994; 9, 8112]$. Welche der folgenden Aussagen ist/sind richtig? Geben Sie eine Begründung an (nur darauf gibt es Punkte).
- (i) Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $\vartheta \in A$ beträgt mindestens 95%.
 - (ii) Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $\vartheta \in A$ beträgt genau 95%.
 - (iii) Wird der Versuch mehrere Male mit immer gleich vielen Messungen wiederholt, liegt ϑ in etwa 95% der dann berechneten Konfidenzintervalle.
 - (iv) Wird der Versuch mehrere Male mit immer gleich vielen Messungen wiederholt, liegt ϑ im Schnitt aller dann berechneten Konfidenzintervalle.

Aufgabe 2: (2+2 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{X} = [0, \infty)^n$ und $\mathbb{P}_\theta = \mathcal{U}_{[0, \theta]}^{\otimes n}$ die Gleichverteilung auf $[0, \theta]^n$, wobei $\theta \in \Theta := [0, \infty)$. Ferner bezeichne

$$T : \mathfrak{X} \rightarrow \Theta, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \max\{x_1, \dots, x_n\}$$

den eindeutigen Maximum-Likelihood-Schätzer für θ (vgl. Vorlesung Bsp. 6.15).

- a) Zeigen Sie:

$$\left[\frac{T(x)}{b}, \frac{T(x)}{a} \right], \quad 0 < a \leq b \leq 1$$

ist für $1 - \alpha := b^n - a^n$ ein Konfidenzintervall für θ zum Fehlniveau α .

- b) Sei $n = 5$ und $x = (0.21, 0.35, 0.17, 0.28, 0.3)$. Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall von θ zum Fehlniveau 10%. Wählen Sie dabei a und b so, dass das Intervall möglichst kurz ist.

Aufgabe 3: (1+1+1 Punkte)

Von Fragebögen, die in der Vorlesung abgegeben wurden, wurden 9 zufällig ausgewählt und die Körpergröße der Studenten ermittelt. Der Mittelwert betrug 178 cm und die korrigierte Stichprobenvarianz 88.889 cm². Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass die Körpergröße der Studenten normalverteilt ist.

- a) Stellen Sie ein Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 0.95 für den Erwartungswert der Körpergröße der Studenten auf.

- b) Wie ändert sich das Ergebnis in a), wenn die Varianz der Grundgesamtheit vor der Untersuchung bekannt ist (also nicht geschätzt werden muss) und 96.04 beträgt?
- c) Wie groß muss in b) das Konfidenzniveau sein, damit das Intervall nur halb so lang ist?

Aufgabe 4: (2+2 Punkte)

Eine Großbäckerei produziert Brötchen mit der Gewichtsvorgabe von $a = 60g$. In der Realität sind die Gewichte einzelner Brötchen jedoch nicht exakt a , sondern unabhängige Zufallsvariablen, gleichverteilt auf dem Intervall $(a - b, a + b)$ mit bekanntem $b > 0$. Um die Erfüllung der Gewichtsvorgabe zu prüfen, werden n Brötchen gewogen und der Mittelwert \bar{X}_n ihrer Gewichte X_1, \dots, X_n berechnet.

- a) Bestimmen Sie (mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes) ein approximatives zweiseitiges 95-Konfidenzintervall für a .
- b) Wenn $b = 3g$ ist, wie groß muss dann n sein, damit die Breite des Konfidenzintervalls in Teil a) höchstens $1g$ beträgt?

Abgabe: Montag, den 05.02.2018 bis 9:59.