Prof. Dr. Achim Klenke Dr. Iulia Dahmer

3. Übung zur Vorlesung

„Stochastik I“

im Sommersemester 2018

In den folgenden beiden Aufgaben seien stets $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ sowie $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ Messräume, $T : \Omega_1 \to \Omega_2$ eine Abbildung, $B \subset \Omega_2$ und $\mathcal{E}$ ein System von Teilmengen von Ω_2. Hierfür verwenden wir die Notationen

$$T^{-1}(\mathcal{E}) := \{T^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{E}\} \quad \text{und} \quad \mathcal{E}\,|_B := \{A \cap B \mid A \in \mathcal{E}\}.$$

Wir nennen nun

(i) $T^{-1}(\mathcal{A}_2)$ die *Initial-σ-Algebra von $\mathcal{A}_2$ unter T*,

(ii) $\{A \subset \Omega_2 \mid T^{-1}(A) \in \mathcal{A}_1\}$ die *Final-σ-Algebra von $\mathcal{A}_1$ unter T*,

(iii) $\mathcal{A}_2\,|_B$ die *Spur-σ-Algebra von $\mathcal{A}_2$ auf B*.

Ist klar, was $\mathcal{A}_2$ ist, so benutzt man für $T^{-1}(\mathcal{A}_2)$ auch die Notation $\sigma(T)$ und spricht von der *von T erzeugten σ-Algebra*.

Aufgabe 1: (2+1+1 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Mengensysteme (i) und (ii) tatsächlich σ-Algebren sind.

(b) Können Sie (iii) auch als einen Spezialfall von (i) auffassen?

(c) Ist $\{T(A) \mid A \in \mathcal{A}_1\}$ ebenfalls eine σ-Algebra?

Aufgabe 2: (2+1 Punkte)

Beweisen Sie die Identitäten:

(a) $T^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) = \sigma(T^{-1}(\mathcal{E}))$,

(b) $\sigma(\mathcal{E})\,|_B = \sigma(\mathcal{E}\,|_B)$.

Aufgabe 3: (1+2+1+2 Punkte)

Sei Ω eine unendliche Menge. Auf $\mathcal{G} := \{A \subset \Omega \mid A \text{ endlich oder } A^c \text{ endlich}\}$ definieren wir die Mengenfunktionen

$$\mu, \nu : \mathcal{G} \to [0, \infty], \qquad \mu(A) := \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ endlich}, \\ \infty, & \text{falls } A^c \text{ endlich}, \end{cases} \qquad \nu(A) := \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ endlich}, \\ 1, & \text{falls } A^c \text{ endlich}. \end{cases}$$

(a) Sei Ω abzählbar.

(i) Zeigen Sie, dass $\mathcal{G}$ eine Algebra ist, aber keine σ-Algebra.

(ii) Zeigen Sie, dass μ ein $\emptyset$-stetiger Inhalt ist, aber kein Prämaß.

(b) Sei Ω nun überabzählbar.

(i) Zeigen Sie, dass $\sigma(\mathcal{G}) = \{A \subset \Omega \mid A \text{ abzählbar oder } A^c \text{ abzählbar}\}$.

(ii) Zeigen Sie, dass ν ein Prämaß ist und sich eindeutig zu einem Maß auf $\sigma(\mathcal{G})$ fortsetzen lässt. Geben Sie dieses explizit an!

Aufgabe 4: (3 Punkte)

Seien $\mathcal{G}$ eine Algebra und μ ein Maß auf $\mathcal{A} := \sigma(\mathcal{G})$, welches σ-endlich ist auf $\mathcal{G}$. Zeigen Sie: Für alle $A \in \mathcal{A}$ und $\varepsilon > 0$ existiert eine Folge paarweise disjunkter Mengen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{G}$ mit $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ und $\mu\left((\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \setminus A\right) < \varepsilon$.

Abgabe: Montag, den 07.05.2018 bis 13 Uhr.