Prof. Dr. Achim Klenke Dr. Iulia Dahmer

5. Übung zur Vorlesung

„Stochastik I“

im Sommersemester 2018

Aufgabe 1: (2+2 Punkte)

Es seien $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T(x) = |x|$ die Betragsfunktion, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion und D_f die Menge ihrer Unstetigkeitsstellen. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist D_f abzählbar, so ist f $\mathcal{B}(\mathbb{R}) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar.

(b) Die Funktion f ist genau dann $\sigma(T) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ messbar, wenn sie $\mathcal{B}(\mathbb{R}) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar und eine gerade Funktion ist (d.h. $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$).

Hinweis zu (b): Sie benötigen keine explizite Rechnung.

Aufgabe 2: (1+1+1+1 Punkte)

Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Ist f monoton, so ist f Borel-messbar.

(b) Ist f differenzierbar, so ist die Ableitung f' Borel-messbar.

(c) Ist f beschränkt, so ist f Borel-messbar.

(d) Ist f rechts- oder linksstetig, so ist f Borel-messbar.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-messbar. Zeigen Sie, dass für jedes $\varepsilon > 0$ eine abgeschlossene Menge $C \subset \mathbb{R}$ mit $\lambda(\mathbb{R} \setminus C) < \varepsilon$ existiert so, dass die Einschränkung $f|_C$ von f auf C stetig ist.

Hinweis: Betrachten Sie zunächst Indikatorfunktionen und verwenden Sie die innere Regularität des Lebesgue-Maßes. Approximieren Sie anschließend mit solchen die Funktion f gleichmäßig auf einer geeigneten Menge C.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Man zeige, dass $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ und $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ als Messräume isomorph sind. D.h., es existiert eine Bijektion $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, so dass Φ $\mathcal{B}(\mathbb{R}) - \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-messbar ist und Φ^{-1} $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar ist.

Vorschlag:

(i) Man konstruiere zunächst eine Bijektion $h : \mathbb{R} \to (0,1)$, so dass h und h^{-1} messbar sind. Man konstruiere dann (siehe (ii)) eine Abbildung $\phi : (0,1) \to (0,1)^2$, $\phi(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x))$ mit ϕ und ϕ^{-1} messbar und setze

$$\Phi(x) = (h^{-1}(\phi_1(h(x))), h^{-1}(\phi_2(h(x)))).$$

(ii) Für $\omega \in (0,1)$ sei $(\omega_n)_{n=1,2,\dots}$ die eindeutige nicht abbrechbare Binärdarstellung, also $\omega = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\omega_n$ mit $\omega_n \in \{0,1\}$, $\limsup_{n\to\infty} \omega_n = 1$.

Definere $X_n : (0,1) \to \mathbb{R}$ durch $X_n(\omega) = \omega_n$ und

$$f_1(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} X_{2n+1}(\omega) 2^{-(n+1)},$$

$$f_2(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} X_{2n}(\omega) 2^{-n}.$$

Zeige: X_n, f_1, f_2 sind messbar. Setze $\phi(\omega) = (f_1(\omega), f_2(\omega))$ und zeige, dass es das Gewünschte leistet.

Abgabe: Dienstag, den 22.05.2018 bis 10:15 Uhr.