Prof. Dr. Achim Klenke | Dr. Iulia Dahmer

6. Übung zur Vorlesung

„Stochastik I“

im Sommersemester 2018

Aufgabe 1: (3 Punkte)

Seien $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig und identisch nach $\exp_1$-verteilt. Berechnen Sie

$$\mathbf{P}[\, X_n \geq a \cdot \log n + b \cdot \log\log n \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}\,].$$

Hinweis: Führen Sie das Problem auf eine geeignete Reihe zurück und untersuchen Sie deren Konvergenzverhalten zum Beispiel mit Hilfe des Cauchy'schen Verdichtungskriteriums.

Aufgabe 2: (2+3 Punkte)

Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig mit $\mathbf{P}[X_n = 1] = \mathbf{P}[X_n = -1] = 1/2$ und $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\mathbf{P}\left[\sup_{n\in\mathbb{N}} |S_n| = \infty\right] = 1.$$

Hinweis: Zeigen Sie erst, dass für jedes feste $k \in \mathbb{N}$ $\mathbf{P}$-fast sicher unendlich viele der Ereignisse $A_{n,k} := \{S_{2k(n+1)} - S_{2kn} = 2k\}$, $n \in \mathbb{N}$, eintreffen.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\mathbf{P}\left[\sup_{n\in\mathbb{N}} S_n = \infty \text{ und } \inf_{n\in\mathbb{N}} S_n = -\infty\right] = 1.$$

Hinweis: Zeigen Sie erst, dass die Ereignisse $\{\sup_{n\in\mathbb{N}} S_n = \infty\}$, $\{\inf_{n\in\mathbb{N}} S_n = -\infty\}$ in der terminalen σ-Algebra von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liegen und begründen Sie, dass beide dieselbe Wahrscheinlichkeit besitzen. Verwenden Sie dann das Ergebnis aus (a).

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte reelle Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Geben Sie alle Verteilungen $\mathbf{P}_{X_1}$ $(= \mathbf{P}_{X_2} = \cdots = \mathbf{P}_{X_n})$ an, mit welchen $Y := \min(X_1, \ldots, X_n)$ und $Z := \max(X_1, \ldots, X_n)$ unabhängig sind unter $\mathbf{P}$.

Aufgabe 4: (2+2 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Zeigen Sie:

(a) Zwei nichtleere Mengensysteme $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ mit $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2 \subset \mathcal{A}$ sind genau dann unabhängig unter $\mathbf{P}$, wenn $\mathcal{E}_1$ $\mathbf{P}$-trivial ist.

(b) Sind X eine reelle Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-messbar, so gilt

$$X \text{ und } f \circ X \text{ sind unabhängig unter } \mathbf{P} \iff f \circ X \text{ ist } \mathbf{P}\text{-f.s. konstant.}$$

Bemerkung: Insbesondere ist eine Zufallsvariable nach (b) genau dann von sich selbst unabhängig, wenn sie fast sicher konstant ist.

Abgabe: Montag, den 28.05.2018 bis 13 Uhr.