9. Übung zur Vorlesung

„Stochastik I"

im Sommersemester 2018

Aufgabe 1: (2+2 Punkte)

a) Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige reellwertige Zufallsvariablen. Zeigen Sie: Existiert eine fast sicher endliche Zufallsvariable X, so dass

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} X \quad \text{fast sicher,}$$

so gilt

$$\forall \varepsilon > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(|X_n| > \varepsilon n\right) < \infty.$$

b) Seien $Y_2, Y_3, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen, die die Werte $n, -n$ und 0 annehmen mit

$$\mathbf{P}(Y_n = n) = \mathbf{P}(Y_n = -n) = \frac{1}{2n\log n}, \qquad \mathbf{P}(Y_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\log n}, \qquad n \geq 2.$$

Zeigen Sie: Die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $X_n := Y_{n+1}$, erfüllt das schwache, aber nicht das starke Gesetz der großen Zahlen.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Seien $X_1, X_2, \ldots$ u.i.v. reellwertige Zufallsvariablen mit $\mathbf{E}[X_1^-] < \infty$ und $\mathbf{E}[X_1^+] = \infty$. Zeigen Sie:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty \qquad \mathbf{P}\text{-fast sicher.}$$

Aufgabe 3: (3+1+1+3 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $X_1, X_2, \ldots : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ unter $\mathbf{P}$ unabhängige Zufallsvariablen. Für $\alpha > 0$ definieren wir die Zufallsvariable

$$Z_\alpha \colon (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})), \quad \omega \mapsto \limsup_{n\to\infty} \left| \frac{X_1(\omega) + \ldots + X_n(\omega)}{n^\alpha} \right|.$$

Zeigen Sie:

(a) Für jedes $\alpha > 0$ ist Z_α $\mathbf{P}$-f.s. konstant.

Hinweis: Verwenden Sie das Kolmogorov'sche 0-1-Gesetz und betrachten Sie

$$x_0 := \inf\{x \in \overline{\mathbb{R}} \,|\, \mathbf{P}(Z_\alpha \leq x) = 1\} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

(b) Es gibt ein $\alpha_0 \in [0, \infty]$ mit

$$Z_\alpha = \begin{cases} \infty \ \ \mathbf{P}\text{-f.s.}, & \text{falls } \alpha \in (0, \alpha_0), \\ 0 \ \ \mathbf{P}\text{-f.s.}, & \text{falls } \alpha \in (\alpha_0, \infty). \end{cases}$$

Hinweis: Zeigen Sie die wegen (a) offensichtlich äquivalente Aussage

$$Z_\beta < \infty \ \mathbf{P}\text{-f.s. für ein } \beta > 0 \quad \Longrightarrow \quad Z_\alpha = 0 \ \mathbf{P}\text{-f.s. für alle } \alpha \in (\beta, \infty).$$

Ab hier seien nun außerdem $X_1, X_2, \ldots \in \mathcal{L}^1(\mathbf{P})$ identisch verteilt mit $\mathbf{E}(X_1) = 0$. Zeigen Sie:

(c) Es gilt $\alpha_0 \leq 1$.

(d) Ist $X_1 \in \mathcal{L}^2(\mathbf{P})$, so gilt sogar $\alpha_0 \leq \frac{1}{2}$.
Hinweis: Zeigen Sie, dass $Z_\alpha < \infty$ $\mathbf{P}$-f.s. für jedes $\alpha > \frac{1}{2}$, indem Sie Ereignisse der Form

$$A_n := \left\{ \max_{k \leq 2^n} |X_1 + \ldots + X_k| \geq (2^n)^\alpha \right\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

betrachten und die Kolmogorov'sche Ungleichung sowie das Lemma von Borel-Cantelli verwenden.

Abgabe: Montag, den 18.06.2018 bis 13 Uhr.