Prof. Dr. Achim Klenke Dr. Iulia Dahmer

10. Übung zur Vorlesung

„Stochastik I“

im Sommersemester 2018

Aufgabe 1: (2+2 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum.

(a) Seien $h, h_1, h_2, \ldots \in \mathcal{L}^1(\mu)$ nichtnegativ und $h_n \xrightarrow{\mu\text{-stoch.}} h$ mit $\int h_n d\mu \xrightarrow{n\to\infty} \int h d\mu$. Zeigen Sie: $h_n \xrightarrow{L^1(\mu)} h$.

(b) Zeigen Sie: Gilt $f_n \xrightarrow{\mu\text{-stoch.}} f$ und existieren $h, h_1, h_2, \ldots \in \mathcal{L}^1(\mu)$ mit

$$|f_n| \le h_n \ \mu\text{-f.ü. für alle } n \in \mathbb{N}, \quad h_n \xrightarrow{\mu\text{-stoch.}} h \quad \text{sowie} \quad \int h_n d\mu \xrightarrow{n\to\infty} \int h d\mu,$$

so sind $f, f_1, f_2, \ldots \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und es gilt $f_n \xrightarrow{L^1(\mu)} f$.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f, (f_n), (g_n) : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar, f integrierbar und (g_n) gleichmäßig beschränkt. Es gebe eine integrierbare Majorante für (f_n), und es gelte $f_n \to f$ μ-fast überall sowie $\int f_m g_n d\mu \xrightarrow{n\to\infty} 0$ für alle m. Zeige:

$$\int f g_n d\mu \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Folgere hinaus das Riemann-Lebesgue-Lemma: Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesque-integriebar gilt

$$\int f(x) \sin(ux) \lambda(dx) \xrightarrow{u\to\infty} 0.$$

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Man zeige: Sind $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige, quadratintegrierbare Zufallsvariablen mit $\mathbf{E}[X_i] = 0$ für jedes $i \in \mathbb{N}$ und $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{Var}[X_i] < \infty$, dann existiert ein quadratintegriebares X mit $X = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} X_i$ fast sicher.

Aufgabe 4: (3 Punkte)

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen mit

$$\mathbf{P}(X_n = 1) = p_n \quad \text{und} \quad \mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - p_n.$$

Zeigen Sie:

i) $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}-\text{stoch.}} 0 \iff \lim_{n\to\infty} p_n = 0$,

ii) $X_n \xrightarrow{L^p} 0 \iff \lim_{n\to\infty} p_n = 0$,

iii) $X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} 0 \iff \sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty$.

(Für $p \in [1,\infty)$ und $X, X_1, X_2, \dots \in \mathcal{L}^p$ sagen wir, dass $(X_n)_{n\geq\mathbb{N}}$ im p-ten Mittel gegen X konvergiert, und schreiben $X_n \xrightarrow{L^p}$ falls $||X_n - X||_p \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.)

Die online-Plattform für Ihre HiWi-Bewerbung zum Wintersemester 2018/19 ist ab sofort geöffnet. Alle qualifizierten InteressentInnen werden um ihre Bewerbung gebeten.

Abgabe: Montag, den 25.06.2018 bis 13 Uhr.