Stochastik-Praktikum **WS 2018/19**

Prof. Dr. Reinhard Höpfner
M.Sc. Frederik Klement

Blatt 4, korrigierte Fassung

Anders als bei der Normalverteilung sind bei der Cauchy-Verteilung Q sehr große Werte keine Seltenheit. Der Grund liegt darin, dass Q sogenannte „Heavy Tails" besitzt. Wenn F_P die Verteilungsfunktion eines Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $[0, \infty)$ ist, dann bezeichnet

$$T_P : [0, \infty) \to [0, 1],\ T_P(x) = 1 - F_P(x).$$

die Tails-Funktion von P. Lässt sich ein $\alpha > 0$ und eine langsame veränderliche Funktion

$$l : [0, \infty) \to [0, \infty) \text{ s.d. } \lim_{t\to\infty} \frac{l(tx)}{l(t)} = 1\ \forall x > 0$$

finden, so dass gilt

$$T_P(y) \sim l(y)y^{-\alpha} \text{ für } y \to \infty,$$

so bezeichnet man P als eine Verteilung mit „Heavy Tails" der Stabilitätsordnung α (für die Definition von „$\sim$" siehe Def.1.24 aus der Vorlesung, ein Beispiel für eine langsame veränderliche Funktion l ist $x \mapsto \log(x)$). Definieren wir die Funktion

$$r_P^t(x) := \frac{T_P(tx)}{T_P(t)},\ x \in I$$

für ein geeignetes großes $t > 0$ und ein geeignetes Intervall I, so ähnelt der Graph von r_P^t dem Graphen der Funktion $x \mapsto x^{-\alpha}$ auf I. Besitzt P „Heavy Tails" der Stabilitätsordnung α, so können wir bei einer guten Wahl von t und I die Stabilitätsordnung α anhand der Kurve von r_P^t gut ablesen.

Aufgabe 1 (5 + 3 Punkte)

a) Wir wollen die Stabilitätsordnung der Cauchy-Verteilung mithilfe von uns erzeugten Cauchy-Stichproben und $r_{\tilde{Q}}^t$ graphisch schätzen, wobei $\tilde{Q}$ die empirische Verteilung der Stichprobe ist. Simulieren Sie dazu 10^4 Stichproben der Cauchy-Verteilung mit `rcauchy`. Bestimmen Sie das 80%- und 90%-Quantil, $\tilde{q}_{0.8}$ und $\tilde{q}_{0.9}$, von $\tilde{Q}$. Zeichnen Sie den Graphen von $r_{\tilde{Q}}^t$ auf dem Intervall $[1, 4]$ für

$$t \in \left\{\tilde{q}_{0.8} + \frac{n}{20}(\tilde{q}_{0.9} - \tilde{q}_{0.8}); 0 \leq n \leq 20, n \in \mathbb{N}\right\}$$

in einen Plot in der Farbe Schwarz. Ergänzen Sie denselben Plot um die Graphen der Funktionen $x \mapsto x^{-\beta}$ in Blau, wobei $\beta \in \{\frac{n}{4}, 1 \leq n \leq 10, n \in \mathbb{N}\}$. Geben Sie anhand ihres Plots einen Schätzwert $\hat{\alpha}$ für α an und ergänzen Sie ihren Plot um den Graphen $x \mapsto x^{-\hat{\alpha}}$ in Rot.

b) Lässt sich diese Methode auch auf echte Daten anwenden? Laden Sie mit dem Befehl

```
dataD<-read.csv("https://www.stochastik.mathematik.uni-mainz.de
                    /files/2018/11/SturmD.csv")[[1]]
```

die Daten des Sturms D herunter. Wiederholen Sie a) für die Daten des Sturms D.

Abgabe bis Freitag, den 16.11., 10 Uhr