Stochastik-Praktikum **WS 2018/19**

Prof. Dr. Reinhard Höpfner
M.Sc. Frederik Klement

Blatt 5

Aufgabe 1 [3 + 2 + 3 Punkte]
Sei $\lambda > 0$. Wir definieren einen zufälligen, $\mathbb{N}_0$-wertigen Prozess $N_\lambda = (N_\lambda(t))_{t\geq 0}$ als Sprungprozess mit exponentiellen Wartezeiten zwischen sukzessiven Sprüngen der Höhe 1, das heißt

$$N_\lambda(t) := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}},$$

wobei

$$T_n := \sum_{j=1}^{n} S_j \quad \text{mit unabhängigen Exp}(\lambda)\text{-verteilten Wartezeiten } S_j,\ j \geq 1.$$

Wir nennen N_λ *Poissonprozess mit Parameter* λ.

a) Schreiben Sie eine Funktion in den Argumenten λ und T, die den Pfad eines Poissonprozesses mit Parameter $\lambda > 0$ auf dem Zeitintervall $[0, T]$ simuliert. Beachten Sie, dass alle Informationen über den Poissonpfad in den Wartezeiten stecken. Die Funktion soll also einen Vektor zufälliger Länge mit exponentialverteilten Zufallszahlen als Komponenten ausgeben.

b) Erstellen Sie vier Koordinatensysteme der Größe $[0, T] \times [0, K_\lambda]$ mit $K_\lambda := \lambda T + 3\sqrt{\lambda T}$ (je Koordinatensystem eine Seite). Verwenden Sie die Werte $T = 150$ und $\lambda = 0.2,\ 0.5,\ 1$ bzw. 3. Zeichnen Sie in jedes Koordinatensystem 6 simulierte Pfade des Poissonprozesses mit Parameter λ verschiedenfarbig ein. Um Sprungfunktionen zu zeichnen, wählen Sie den Parameter `type` im `plot`- bzw. `lines`- Befehl geeignet. Kennzeichnen Sie die Sprungstellen zusätzlich durch Punkte.

c) Simulieren Sie 1000 Pfade des Poissonprozesses mit Parameter $\lambda = 0.5$ bis zum Zeitpunkt $T = 20$. Zählen Sie bei jedem Pfad, wie viele Sprungstellen sich in den Intervallen $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 1, 2, 3$ befinden mit $t_1 = 0$, $t_2 = 2$, $t_3 = 8$ und $t_4 = 20$. Sie erhalten so 3 Vektoren der Länge 1000. Erstellen Sie für jeden dieser Datensätze ein Histogramm der relativen Häufigkeiten. Wählen Sie dabei eine einheitliche Skalierung `breaks = seq(-0.5, M + 0.5, 1)` mit geignetem $\mathtt{M} \in \mathbb{N}$. Zeichnen Sie in jedes Histogramm die Wahrscheinlichkeitsgewichte der Poissonverteilung mit Parameter $\lambda(t_{i+1} - t_i)$ als Punkte farbig ein. Interpretieren Sie das Ergebnis.

Abgabe bis Freitag, den 23.11., 10 Uhr