Stochastik-Praktikum **WS 2018/19**

Prof. Dr. Reinhard Höpfner

M.Sc. Frederik Klement

Blatt 9

Für eine stetige Funktion $\varphi : [0,T] \to \mathbb{R}$ (dies kann insbesondere der Pfad eines stochastischen Prozesses sein, der über das Zeitintervall $[0,T]$ beobachtet wurde) sei die *empirische quadratische Variation mit Schrittweite* $\epsilon > 0$ definiert durch

$$\mathcal{V}_T^{(2)}(\epsilon) := \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{T}{\epsilon} \rfloor} (\varphi((i+1)\epsilon) - \varphi(i\epsilon))^2.$$

Ist φ so, dass ein Grenzwert der $V_T^{(2)}(\epsilon)$ für $\epsilon \downarrow 0$ existiert, so heisst dieser *quadratische Variation:*

$$\mathcal{V}_T^{(2)} := \lim_{\epsilon \downarrow 0} \mathcal{V}_T^{(2)}(\epsilon).$$

Aufgabe 1 [8 Punkte]

Man simuliere Pfade der Brownschen Bewegung über Zeitintervalle $[0,T]$, $T \in \{0.75, 3, 5, 7, 11, 13\}$, mit Schrittweite $\delta = 10^{-5}$. Man überzeuge sich davon, dass der Brownsche Pfad eine endliche quadratische Variation besitzt, welche durch

$$\mathcal{V}_T^{(2)} = T \quad \text{bei Beobachtung über das Zeitintervall [0,T]}$$

gegeben ist.

a) Man berechne $\mathcal{V}_T^{(2)}(\epsilon)$ für ϵ der Form $j\delta$ und mit $20 \le j \le 0.1\lfloor \frac{\min\{T,1\}}{\delta} \rfloor$ (zur Vermeidung unerwünschter Mikrostruktureffekte in reellen Daten sollte j nicht zu klein sein).

b) Man zeichne die $\mathcal{V}_T^{(2)}(\epsilon)$ als Punkte in ein Fenster des Formates $[0, 0.15] \times [T - \sqrt{T}, T + \sqrt{T}]$ ein. Zeichnen Sie jeweils drei Plots in eine Graphik.

Hinweis: Für jede Wahl von T simuliere man sich mehrmals neue Brownsche Pfade, für die man sich ein Bild nach a) und b) anschaue.

Abgabe bis Freitag, den 21.12., 10 Uhr