**Stochastik-Praktikum** **WS 2018/19**

Prof. Dr. Reinhard Höpfner
M.Sc. Frederik Klement

Extrablatt
Alle Punkte auf diesen Blatt sind Extrapunkte.

---

Wir knüpfen an Blatt 13 an und untersuchen weiter den Ornstein-Uhlenbeck-Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$. Im *rekurrenten* Fall $\theta < 0$ kann man zeigen, dass die Verteilung $\pi = \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2|\theta|}\right)$ ein *invariantes* Wahrscheinlichkeitsmaß für $(X_t)_{t\geq 0}$ ist. Das bedeutet: Wenn der Startwert $X_0$ zufällig und gemäß $\pi$ verteilt ist, so ist auch der Wert des Prozesses zu jedem festen Zeitpunkt $t_0$ verteilt wie $\pi$, also $X_{t_0} \sim \pi$ falls $X_0 \sim \pi$.

**Aufgabe 1** [4 Extrapunkte]
Wir untersuchen dies für die Werte $\theta = -4$, $\theta = -1$ und $\theta = -0.5$, indem Sie jeweils 1000 Ornstein-Uhlenbeck-Pfade mit Startverteilung $\pi$ bis zur Zeit 1 laufen lassen und dann aufbewährter Weise uns ein Bild der Verteilung von $X_1$ machen. Es sei $\delta = 10^{-3}$. Gehen Sie dabei für jeden drei Werte von $\theta$ folgendermaßen vor:

a) Simulieren Sie $N = 1000$ Mal einen Ornstein-Uhlenbeck Prozess, hierbei soll $X_0$ die Verteilung $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2|\theta|}\right)$ besitzen. Beachten Sie, dass Sie hierzu für jede neue Simulation ein neues $X_0$ gemäß der obigen Verteilung erzeugen sollen.

b) Erstellen Sie ein Histogramm von $X_1$. Ergänzen Sie dieses mit der Dichte von $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2|\theta|}\right)$.

**Hinweis:** Simulieren Sie den Ornstein-Uhlenbeck Prozess wie auf Blatt 13.

**Aufgabe 2** [4 Extrapunkte]
Aber was passiert im rekurrenten Fall, wenn $X_0$ nicht die Verteilung $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2|\theta|}\right)$ besitzt? In diesem Fall kann man zeigen, dass die Verteilung von $X_t$ für $t \to \infty$ gegen die invariante Verteilung konvergiert. Wir werden versuchen durch Simulation dieses Phänomen nachzuvollziehen für die Werte $X_0 = 1$, $X_0 = -1$ und $X_0 = 5$. Es seien $\theta = -2$ und $\delta = 10^{-2}$. Gehen Sie dabei für jeden der drei Werte von $X_0$ folgendermaßen vor:

a) Simulieren Sie 1000 Mal den Ornstein-Uhlenbeck Prozess bis zum Zeitpunkt $T = 100$ für die obigen Parameter.

b) Erstellen Sie jeweils für die Zeitpunkte 0.25, 1, 10, 100 ein Histrogramm ihrer Simulationen und ergänzen Sie diese um die Dichte von $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2|\theta|}\right)$.

**Abgabe bis Freitag, den 08.02.19, 10 Uhr**