Stochastik-Praktikum **WS 2023-2024**

Prof. Dr. Matthias Birkner
Jan Lukas Igelbrink

Blatt 6

Aufgabe 1 (6 Punkte)
Führen Sie folgendes Zufallsexperiment durch: Sie platzieren n Gäste in einem Restaurant. Der erste Gast betritt das Restaurant und eröffnet einen neuen Tisch. Der k-te Gast setzt sich mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{k-1+\Theta_n}$ neben Gast Nummer $i \leq k-1$ und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{\Theta_n}{k-1+\Theta_n}$ eröffnet er einen neuen Tisch. Für jeden Tisch würfeln Sie jetzt eine unabhängig identisch verteilte Farbe, uniform aus $\{\pm 1\}$. X_i bezeichne die Farbe des Tisches, an dem Gast i sitzt. Es sei $S_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=1}^{n} X_l$. Simulieren Sie 1.000 Realisierungen von S_{1000}. Nutzen Sie `https://stat.ethz.ch/R-manual/R-devel/library/stats/html/density.html`, um die Dichte von S_{1000} zu schätzen und vergleichen Sie diese mit einer passenden Normalverteilung in einem gemeinsamen Plot. Erstellen Sie einen Plot für $\Theta_n = \sqrt{n}$ und einen für $\Theta_n = n$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Stellen Sie sich folgendes Experiment vor: Im Punkt $(z,1)$ steht ein Schütze vor der Wand $\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ und schießt in zufälligem Winkel auf die Wand. Der Abstand der Eintrittsstelle eines Schusses zu $(z,0)$ ist Cauchy-verteilt. Gegeben n beobachtete Eintrittsstellen

$$(x_1, 0), \ldots, (x_n, 0) \tag{1}$$

sollen Sie z schätzen. Ein Möglichkeit z zu schätzen, ist es für n groß

$$\bar{x}_n := \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} x_l \tag{2}$$

zu berechnen. Eine andere Möglichkeit ist es

$$\hat{x}_n := \text{Median}\,(x_1, \ldots, x_n) \tag{3}$$

zu verwenden. Analog zu Definition 3.22 in den Vorlesungsnotizen definieren wir den Median als dasjenige m, so dass

$$\frac{1}{n}\{i : x_i \geq m\} \geq \frac{1}{2} \text{ und } \frac{1}{n}\{i : x_i \leq m\} \geq \frac{1}{2} \tag{4}$$

gilt.

Simulieren Sie 1.000 Cauchy-verteilte Zufallszahlen, das entspricht $z = 0$, und tragen Sie

$$(\bar{x}_n)_{n=1,\ldots,1000} \tag{5}$$

und

$$(\hat{x}_m)_{n=1,\ldots,1000} \tag{6}$$

in zwei verschiedenen Plots auf. Welcher Art des Schätzens von z scheint besser zu sein?

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Wir haben bereits die Inversionsmethode kennengelernt, um Zufallsvariablen mit einer vorgegebenen Verteilung zu erzeugen. Hierbei mussten wir zuvor die Inverse der entsprechenden Verteilungsfunktion berechnen. Letzteres ist nicht immer möglich bzw. sehr aufwendig. In Situationen, in denen wir zwar nicht die Verteilungsfunktion F kennen jedoch die Dichte f, können wir auf die Verwerfungsmethode zurückgreifen.

Für die Verwerfungsmethode brauchen wir eine zweite Dichte g und eine Konstante $C \geq 1$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) \leq Cg(x).$$

Um nun eine Zufallsvariable mit Dichte f zu erhalten, erzeugen wir zunächst eine Zufallsvariable Y mit Dichte g und eine auf $[0, 1]$ uniformverteilte Zufallsvariable U. Wir akzeptieren die Stichprobe und geben den Wert Y zurück, falls gilt

$$U \leq \frac{f(Y)}{Cg(Y)},$$

ansonsten starten wir die Prozedur von vorne.

Verwenden Sie die Verwerfungsmethode, um Stichproben der Standardnormalverteilung $\mathcal{N}_{0,1}$ zu erzeugen. Verwenden Sie für g hierbei die Dichte der Doppelexponentialverteilung

$$g(x) = \frac{1}{2}\exp(-|x|), \qquad x \in \mathbb{R}$$

und die Konstanten $C_1 = 1.7$ und $C_2 = 2.2$. Erzeugen Sie für beide Konstanten jeweils 10^4 Zahlen und erstellen Sie ein (Dichte-)Histogramm, ergänzen Sie die passende theoretische Dichte und bestimmen Sie, wie viele doppelexponential verteilte Zufallszahlen Sie im Schnitt pro simulierten normalverteilten Wert erzeugen müssen.