Stochastik-Praktikum **WS 2023-2024**

Prof. Dr. Matthias Birkner
Jan Lukas Igelbrink

Blatt 7

Aufgabe 1 (5 +5 = 10 Punkte)
Wir wollen mit Hilfe eines Monte-Carlo-Verfahrens folgendes Integral bestimmen:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dx\;dy\;dz$$

.

a) Verwenden Sie zunächst ein naives Monte-Carlo-Verfahren, indem Sie für x, y und z drei unabhängige U_x, U_y, U_z auf $[-1, 1]$ uniformverteilte Zufallsvariablen verwenden. Simulieren Sie eine passende Zufallsvariable $X = f(U_x, U_y, U_z)$, um das Integral zu schätzen. Schätzen Sie die Standardabweichung ihres Schätzers für $n = 10^5$ Simulationen.
(*Hinweis:* `sd` mit einer passenden Normierung ist hilfreich.)

b) Die Varianz unseres Monte-Carlo-Schätzers ist gegeben durch $\frac{1}{n}\mathrm{Var}(X)$. Wir können also die Varianz unseres Schätzer verringern, indem wir X durch eine neue Zufallsvariable Y mit $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X]$ und $\mathrm{Var}[Y] < \mathrm{Var}[X]$ ersetzen. Eine Methode hierfür ist die der **Kontrollvariable**. Für diese benötigen wir eine mit X korrelierte Zufallsvariable Z (deren Erwartungswert wir im Idealfall kennen). Setzen wir

$$Y := X - \frac{\mathrm{Cov}[X, Z]}{\mathrm{Var}[Z]}(Z - \mathbb{E}[Z])$$

dann gilt $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X]$ und $\mathrm{Var}[Y] = \mathrm{Var}[X] - (\mathrm{Cov}[X, Z])^2/\mathrm{Var}[Z]$. Wegen $\mathrm{Cov}[X, Z] \neq 0$ ist $\mathrm{Var}[Y]$ dann kleiner als $\mathrm{Var}[X]$.
Verwenden Sie die Methode der **Kontrollvariable** mit $Z = \exp(-U_x^2 - U_y^2 - U_z^2)$ wobei U_x, U_y, U_z jeweils dieselben uniformverteilten Zufallsvariablen sind, mit denen Sie auch X erzeugt hatten. Erzeugen Sie $n = 10^5$ Simulationen von (X, Z). Schätzen Sie mit Hilfe ihrer Simulationen $\mathbb{E}[Z]$, $\mathrm{Var}[Z]$ und $\mathrm{Cov}[X, Z]$ empirisch und verwenden Sie diese Schätzungen, um Y zu berechnen. Bestimmen Sie den so gewonnen empirischen Mittelwert von Y und schätzen Sie die Standardabweichung Ihres Schätzers wie in **a)**.

Aufgabe 2 (8 Punkte)
In der Vorlesung wird die Chebychev-Ungleichung (Formel (4.2) in Satz 4.1) bewiesen: Für eine reellwertige Zufallsvariable $X \in \mathcal{L}^2$ gilt

$$P\big(|X - \mathbb{E}[X]| > x\big) \leq \frac{\mathrm{Var}[X]}{x^2}$$

wobei $\mathrm{Var}[X] := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$. Diese Ungleichung ist oft sehr nützlich, aber auch recht grob. Wie grob? Das wollen wir in dieser Aufgabe anhand von Beispielen und `R` untersuchen. Dazu definieren wir für eine reelle Zufallsvariable X die Funktion

$$f(c) := c^2 P\left(|X - \mathbb{E}[X]| > c\sqrt{\mathrm{Var}[X]}\right) \text{ für } \ c > 0.$$

Durch Einsetzen in die obige Ungleichung können wir lediglich folgern, dass stets $f(c) \leq 1$ gilt. Um eine bessere Approximation für f zu erhalten, simulieren Sie $m = 10^4$ mal die Zufallsvariable X und zwar jeweils für die vier unten aufgelisteten Fälle. Schätzen sie für $c \in \{0.1, 0.2, ..., 5.0\}$ den Wert $f(c)$ durch

$$\tilde{f}(c) = c^2 \frac{N_c}{m},$$

wobei N_c die Zahl Ihrer Simulationen sei, für die das Ereignis $\{|X - \mathbb{E}[X]| > c\sqrt{\mathrm{Var}[X]}\}$ eingetroffen ist. Plotten Sie die von Ihnen berechneten Werte von $\tilde{f}$ in Abhängigkeit von c. Die zu betrachtenden Fälle sind:

	Verteilung von X	$\mathbb{E}[X]$	$\mathrm{Var}[X]$	`R`-Funktion
1. Fall	Geom_p mit $p = 0.3$	$\frac{1-p}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	`rgeom`
2. Fall	$\mathrm{Unif}_{[0,1]}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	`runif`
3. Fall	$\mathrm{Unif}_{[-2,2]}$	0	$\frac{4}{3}$	`runif`
4. Fall	Exp_a mit $a = 5$	a^{-1}	a^{-2}	`rexp`