Stochastik-Praktikum **WS 2023-2024**

Prof. Dr. Matthias Birkner
Jan Lukas Igelbrink

Blatt 8

Aufgabe 1 [Simulation der Brown'schen Bewegung] (3+2+2+2=9 Punkte)

Wir simulieren den Pfad einer Brown'schen Bewegung über das Zeitintervall $[0, T]$ auf einem diskreten Gitter der Schrittweite $\Delta > 0$.

a) Schreiben Sie eine Funktion in den Parametern T und Δ, die einen Vektor

$$B_0, B_\Delta, B_{2\Delta}, ..., B_{(M-1)\Delta}$$

mit den simulierten Werten eines Brown'schen Pfades an den Stellen $0, \Delta, ..., (M-1)\Delta$ ausgibt. Dabei ist $M := \lfloor (T/\Delta) \rfloor$ die Anzahl der Gitterpunkte. (Zum Abrunden verwenden Sie beispielsweise den Befehl `floor`.) Es bietet sich an so vorzugehen: Es seien $Z_1, Z_2, \ldots$ unabhängig und standardnormalverteilt, dann gilt

$$B_0 = 0, \qquad B_\Delta \stackrel{(d)}{=} \sqrt{\Delta} Z_1, \qquad \ldots, \qquad B_{(M-1)\Delta} \stackrel{(d)}{=} B_{(M-2)\Delta} + \sqrt{\Delta} Z_k. \tag{1}$$

b) Nun sei $T = 1$. Simulieren Sie für verschiedene Werte von Δ je 9 zufällige Realisierungen der Brown'schen Bewegung und zeichnen Sie die Pfade verschiedenfarbig in ein Koordinatensystem, indem Sie zwischen den Werten an den Gitterpunkten linear interpolieren. Verwenden Sie die Werte $\Delta = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$ und kennzeichnen Sie die verschiedenen Schrittweiten in einer Legende.

c) Wir untersuchen, welcher Verteilung das zufällige Maximum eines Brown'schen Pfades genügt. Simulieren Sie dazu 1000 Brown'sche Pfade bis zum Zeitpunkt $T = 1$ mit Schrittweite $\Delta = 10^{-5}$. Erstellen Sie eine geeignet formatierte Graphik der empirischen Verteilungsfunktion der Maxima der 1000 Pfade.

Vergleichen Sie diese empirische Verteilungsfunktion mit der Funktion $x \mapsto \big(2\Phi(x) - 1\big) \vee 0$, wobei $\Phi(x) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{x} \exp(-z^2/2)\, dz$.

d) Plotten Sie 100 simulierte Pfade der Brown'schen Bewegung ausgewertet bis zum Zeitpunkt $T = 0.2$ in ein Koordinatensystem. Verwenden Sie als Schrittweite $\Delta = 10^{-6}$. Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen $(0, T] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{2x \log(\log(\frac{1}{x}))}$ bzw. $x \mapsto -\sqrt{2x \log(\log(\frac{1}{x}))}$ in die Graphik. Interpretieren Sie die Zeichnung.

Aufgabe 2 (2-dim. Brownsche Bewegung) (3+2+2+2=9 Punkte)
Eine 2-dimensionale Brownsche Bewegung ist ein 2-dimensionaler stochastischer Prozess, dessen Komponenten unabhängige eindimensionale Brownsche Bewegungen (mit Startpunkt 0 zur Zeit 0) sind. *Hinweis: Fall Sie Indizes vermeiden möchten, können Sie mit $\mathbb{C}$ statt mit $\mathbb{R}^2$ arbeiten:: In R schreibt man komplexe Zahlen* `z` *als* `a+b*1i` *und hat die Funktionen* `Re(z)`, `Im(z)`, `Mod(z)`, `Arg(z)`, `Conj(z)` *zur Verfügung; Informationen z.B. mit* `help(Re)`.

(a) Schreiben Sie eine Funktion in den Argumenten r und Δ, welche als Ausgabe die (zufällige) Zeit und den (zufälligen) Ort liefert, an dem eine mit (Zeit-)Schrittweite Δ simulierte 2-dimensionale Brownsche Bewegung zum ersten Mal den Kreis mit Radius r um den Ursprung verlässt.

(b) Zeichnen Sie den Pfad einer 2-dimensionale Brownschen Bewegung (mit Schrittweite $\Delta = 10^{-5}$) bis zum Verlassen des Einheitskreises, indem Sie eine ähnliche Funktion wie in (a) verwenden.

Wenn Sie sicher sind, dass Ihr Algorithmus zur Simulation der 2-dimensionalen Brownschen Bewegung zufriedenstellend funktioniert, können Sie an die Bearbeitung der folgenden beiden Teilaufgaben gehen:

(c) Rufen Sie die Funktion aus (a) 250 mal auf ($r = 1, \Delta = 10^{-5}$) und speichern sie die Austrittszeiten und -orte jeweils in einem Vektor ab. Zeichnen Sie in einen Plot die (näherungsweisen) Austrittsorte der 250 Brownschen Pfade aus dem Einheitskreis ein. Stellen Sie eine Vermutung auf, wie die Austrittsorte auf dem Einheitskreis verteilt sind!

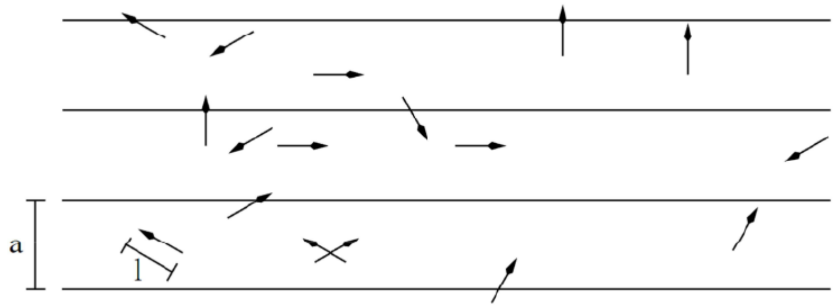
(d) Überprüfen Sie Ihre Vermutung aus (c), indem Sie die *Argumente* der 250 Austrittsorte betrachten (d.h. falls z der Austrittsort ist, so ist $Arg(z)$ derjenige Winkel $\varphi \in (-\pi, \pi)$ mit $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$; siehe `help(Arg)`). Plotten Sie die empirische Verteilungsfunktion der Argumente.

Wenn Sie Lust haben, können Sie sich anhand von `https://www.stochastik.mathematik.uni-mainz.de/files/2023/12/sum_independent_cauchy.pdf` *auch noch damit vertraut machen, wie man die Erkenntnisse aus Aufgabenteil* ***c)*** *und* ***d)*** *verwenden kann, um etwas über die Verteilung der Summe zweier unabhängiger Cauchyverteilter zu beweisen.*

Sollten Sie an etwas historischem Kontext und Heuristik zur Brown'schen Bewegung interessiert sein, dann finden Sie im Buch ***Fractal Geometry of Nature*** *(1982) von B. Mandelbrot (mehrfach in der MIN-Bibliothek vorhanden) in Kapitel 25 und Abschnitt 2 von Kapitel 41 zahlreiche Gedanken und auch Referenzen, zum Beispiel zur Pionierarbeit von Albert Einstein in 1905.*

Bonusaufgabe [Buffonsches Nadelproblem] (Bis zu 1+1+1=3 Punkte können Sie hiermit ausgleichen)

Das 'Buffonsche Nadelproblem' aus dem Jahre 1733 geht auf Georges-Louis Leclerc de Buffon zurück und liefert eine probabilistische Möglichkeit zur näherungsweisen Berechnung der Kreiszahl π.



Auf eine sehr große ebene Fläche sind parallele waagerechte Linien im Abstand a zueinander aufgezeichnet. Aus großer Höhe wird eine Nadel der Länge $l \leq a$ fallen gelassen. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Nadel eine der Linien berührt beträgt $\frac{2l}{\pi a}$.

a) Schreiben Sie eine Funktion in den Argumenten $N \in \mathbb{N}, l, a \in \mathbb{R}$ mit $l \leq a$, die das N-fache Werfen einer Nadel nach Buffon simuliert. Die Funktion soll die relative Anzahl der Nadeln, die eine Linie berühren, ausgeben. Beachten Sie: Für das Experiment ist nicht die absolute Lage der Nadel entscheidend, sondern nur ihre relative vertikale Lage zu einer der Linien, sowie der Winkel zu dieser Linie. Nutzen Sie Ihre Funktion mit den Parametern $N = 100\,000\, a = 1, l = 0.5$, um eine Näherung für π anzugeben.

Im Jahre 1901 bestimmte Mario Lazzarini einen Schätzer $\widehat{\pi} = 3.1415929...$ mit Hilfe des Buffonschen Nadelwurfexperimentes und näherte π so auf erstaunliche sechs Nachkommastellen genau.[1] Dazu genügte ihm das Werfen von $N = 3408$ Nadeln. Ist das präzise Ergebnis plausibel oder könnte Lazzarini das Experiment verfälscht haben?

b) Simulieren Sie mit Hilfe Ihrer Funktion aus a) 1000 mal den 3408-fachen Nadelwurf von Lazzarini und erstellen Sie ein Histogramm der entsprechenden Schätzwerte für π. Verwenden Sie die Parameter $a = 0.6$ und $l = 0.5$

c) Simulieren Sie nun solange den Nadelwurf, bis der Schätzwert für π auf die dritte Nachkommastelle genau ist oder bis Sie 500 000 Nadeln geworfen haben und brechen Sie das Experiment dann ab. Führen Sie dies 100 mal durch und speichern Sie jeweils die benötigte Anzahl an Würfen. Stellen Sie den Datensatz in einem geeigneten Histogramm da. Wie verändert sich das Ergebnis, wenn Sie die dritte Nachkommastelle von π durch eine andere Ziffer ersetzen?

[1] M. Lazzarini, Un' applicazione del calcolo della probabilita alla ricerca sperimentale di un valore approssimato di π, Periodico di Matematica, 4 (1901), 140-3 (zit. n.: L. Badger, Lazzarini's Lucky Approximation of π, Mathematics Magazine, 67 No. 2 (1994), S. 83-91.)